Ordinalzahlanalyse prädikativer Theorien unter Verwendung von Fundamentalfolgen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Anton Setzer

Mathematisches Institut der
Ludwig-Maximilians-Universität München

Januar 1990

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

Diese Diplomarbeit gliedert sich in zwei Hauptteile. Im ersten Teil, der die Kapitel 2 - 10 umfaßt, analysiere ich das in [1] dargestellte Ordinalzahlbezeichnungssystem $(\mathrm{OT}, \prec)$, insbesondere hinsichtlich Fundamentalfolgen. Der zweite Teil, Kapitel 11 - 15, ist dann rein beweistheoretisch. In diesem Teil wird die in [3] entwickelte übersichtliche Methode, Schranken für in der Peano-Arithmetik beweisbare Π^0_2-Sätze zu finden, weiter verallgemeinert und auf die Δ^1_1-Analysis angewandt.
Im Folgenden werde ich zunächst einen Überblick geben und dabei auf die verwendete Literatur hinweisen.
In Kapitel 2 werden die Funktionen ψ_v zusammen mit den Ordinalzahlmengen C_v eingeführt und grundlegende Eigenschaften dargestellt. Es ist im Wesentlichen bis auf den Abschnitt 2.14 - 2.18 eine Übersetzung von Kapitel 1 in [1].
In Kapitel 3 wird das Ordinalzahlbezeichnungssystem $(\mathrm{OT}, \prec)$ eingeführt. Es ist eine Übersetzung von Kapitel 2 aus [1].
In Kapitel 4 werden die Fundamentalfolgen für OT eingeführt. Die erste Hälfte ist weitgehend eine Übersetzung von Kapitel 3 aus [1]. Da aber in dieser Arbeit nicht die volle Fundamentalfolgeneigenschaft (also die Eigenschaft von Satz 4.15) benötigt wurde, wurde dort zur Vereinfachung bei der Definition der Fundamentalfolgen in [ ].4 (ii) $a[n] := D_v b[D_u b[1]]$ definiert. Dies wurde in der vorliegenden Arbeit modifiziert, wobei ich im Wesentlichen eine handschriftliche Ausarbeitung von Herrn Prof. Dr. Buchholz ([5]) unmittelbar übernommen habe.

Nachdem die Kapitel 2 - 4 nur eine Zusammenstellung von Ergebnissen umfassen, ich also nur Tipparbeit geleistet habe, geht in die folgenden Kapitel eigene mathematische Arbeit ein.
Im Gegensatz zu Varianten des eingeführten Ordinalzahlbezeichnungssystems (in [4] wird z.B. $\lambda\alpha.\omega^\alpha$ verwendet) wurden in [1] und damit auch in der vorliegenden Arbeit bei der Definition von OT die Funktionen $\lambda\alpha.\omega^\alpha$ und $\lambda(\alpha,\beta).\phi_\alpha\beta$ nicht verwendet. In Kapitel 5 wird nun eine Darstellung von ω^α für $\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ angegeben und in Kapitel 6 $\phi_\alpha\beta$ für $\alpha,\beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ berechnet. Hierbei greife ich auf Ideen aus [4] zurück. Dort konnte allerdings sofort auf die Funktion $\lambda\alpha.\omega^\alpha$ zurückgegriffen werden und damit konnte sehr leicht ${\Omega_1}^\alpha$ und die Multiplikation von Ordinalzahlen berechnet werden, was die Berechnung von $\phi_\alpha\beta$ dort sehr vereinfachte. Weiter wurde in [4] $\phi_\alpha\beta$ nur für $\alpha,\beta < \Gamma_0$ berechnet.
Die Definition der Fundamentalfolgen verwendete das Ordinalzahlbezeichnungssystem OT, in dem ω^α und $\phi_\alpha\beta$ nur abgeleitete Funktionen sind. Deshalb müssen die Fundamentalfolgen für $\phi_\alpha\beta$ und ω^α erst berechnet werden. In Kapitel 7 untersuche ich diese. Dieses Kapitel ist rein technischer Natur. Leider sind die Fundamentalfolgen nicht so schön übersichtlich, wie man sie üblicherweise definiert (vgl. insbesondere Lemma 7.3).
In den Kapiteln 8 - 10 werden die Relation $<_k$ und die Funktionen der schnellwachsenden Hierarchie F_α untersucht. Um zunächst unabhängig von der speziellen Wahl von Fundamentalfolgen und auch von den Schwierigkeiten aus Kapitel 7 zu sein, gehe ich in Kapitel 8 zunächst von einem beliebigen Ordinalzahlabschnitt mit Fundamentalfolgenzuordnung aus, der die Bachmannbedingung erfüllt. Im Abschnitt 8.2 - 8.7 führe ich dabei nur die Beweise von [6] aus, der Rest von Kapitel 8, insbesondere die Definition der Relation $\widetilde{<}$ beruht auf eigener mathematischer Arbeit. In Kapitel 9, das auf eigener Arbeit beruht, verschärfe ich die Anforderungen an die Fundamentalfolgen leicht, und untersuche zunächst im Wesentlichen die Verträglichkeit der Relation $\widetilde{<}$ mit der direkten Summe #. Besonders hinweisen möchte ich auf Folgerung 9.4, die die Interpretation prädikativer Theorien später erleichtern wird. Weiter führe ich dann die Ordinalzahlverknüpfung $\uplus$ ein, die für die Interpretation der Δ^1_1-Analysis (DA) bedeutsam sein wird. In Kapitel 10 wende ich die Ergebnisse der Kapitel 8 und 9 auf den Abschnitt $\psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ an, und untersuche die Verträglichkeit von $<_k$ mit ω^α und $\phi_\alpha\beta$.
Mit Kapitel 11 beginnt dann der beweistheoretische Teil der Arbeit. In diesem Kapitel wird das halbformale System (Σ) eingeführt, Schnittelimi-

nation durchgeführt und das Kollabierungslemma 11.6 bewiesen. In seinen Grundzügen geht es auf eine Ausarbeitung von Herrn Prof. Dr. Buchholz ([6]) zurück, bei den Schnitteliminationsätzen 11.11 und 11.12 war erhebliche Beweisarbeit zu leisten.
In Kapitel 12 interpretiere ich die Peano-Arithmetik (PA) in (Σ). Hierbei habe ich im Wesentlichen den Beweis in [3] auf das in Kapitel 11 eingeführte Konzept übertragen, gewissermaßen eine Vorübung für Kapitel 14.
In Kapitel 13 führe ich die Δ^1_1-Analysis (DA) und die verzweigte Analysis (RA^*) ein, die eine Fassung der entsprechenden Axiomensysteme aus [8] im Taitkalkül sind, wobei der Beweiskalkül von (RA^*) derjenige von (Σ) ist. Dieses Kapitel folgt in seinen Grundzügen dem entsprechenden Abschnitt in [8].
In Kapitel 14 wird dann (DA) in (RA^*) interpretiert. Hierbei folge ich wiederum dem Konzept in [8].
In Kapitel 15 wird dann das Ergebnis angegeben, auf das die Diplomarbeit abzielte, nämlich Schranken für die in (PA) bzw. (DA) beweisbaren Π^0_2-Sätze.

Ich möchte mich bei Herrn Prof. Dr. Buchholz für seine intensive Betreuung bedanken. Mein Dank gilt weiterhin Herrn Prof. Dr. Schwichtenberg und Herrn Prof. Dr. Sieg, von deren Vorlesungen und Seminaren ich sehr profitiert habe.

Teil I

Ordinalzahlanalyse

Kapitel 2

Die Funktionen $\psi_v(v \leq \omega)$

In diesem Kapitel werden die Ordinalzahlfunktionen ψ_v und die Ordinalzahlmengen $C_v(\alpha)$ eingeführt und grundlegende Eigenschaften untersucht.

Vorbemerkungen 2.1
Im Folgendenen bezeichnen die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \eta, \zeta$ immer Ordinalzahlen. 'On' bezeichnet die Klasse aller Ordinalzahlen und 'Lim' die Klasse der Limesordinalzahlen. Wie üblich sei $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ die Abzählung der unendlichen Kardinalzahlen. Wir definieren

$$\Omega_\xi := \begin{cases} 1, & \textit{falls } \xi = 0, \\ \aleph_\xi, & \textit{falls } \xi > 0. \end{cases}$$

P bezeichne die Klasse der additiven Hauptzahlen d.h.

$$P = \{\alpha \in On \mid 0 < \alpha \wedge \forall \xi, \eta < \alpha \quad (\xi + \eta < \alpha)\} = \{\omega^\xi \mid \xi \in On\}.$$

Definition von $P(\alpha)$.

(1) $P(0) := \emptyset$.
(2) *Ist $\alpha > 0$ so existieren eindeutig bestimmte $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in P$ mit $\alpha_n \leq \cdots \leq \alpha_0$ und $\alpha = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$; dann sei $P(\alpha) := \{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$.*

Sei $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $\beta = \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_l$ *mit* $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$, $\alpha_{k+1} \geq \cdots \geq \alpha_l$, $\forall i(\alpha_i \in P)$. *Dann sei wie üblich die direkte Summe* $\alpha \# \beta := \alpha_{\pi(1)} + \cdots + \alpha_{\pi(l)}$, *wobei* π *eine Permutation von* $1, \ldots, l$ *mit* $\alpha_{\pi(1)} \geq \cdots \geq \alpha_{\pi(l)}$ *sei.*

Wir definieren $\alpha =_{NF} \beta_1 + \cdots + \beta_n :\Leftrightarrow \alpha = \beta_1 + \cdots + \beta_n\ ) \wedge$
$(\forall 1 \leq i < n\ \ (\min(P(\beta_i)) \geq \max(P(\beta_{i+1})) \vee \beta_i = 0 \vee \beta_{i+1} = 0)$.

Lemma 2.2

(a) $\alpha \notin P \Leftrightarrow P(\alpha) \subset \alpha$.
(b) $\gamma \in P \Rightarrow (P(\alpha) \subset \gamma \Leftrightarrow \alpha < \gamma)$.
(c) $P(\beta) \subset P(\alpha + \beta) \subset P(\alpha) \cup P(\beta)$.
(d) $\Omega_\xi \in P$, *für alle* $\xi \in On$.

Beweis: klar.

Definition 2.3
(Definition der Ordinalzahlmengen $C_v(\alpha)$ *und Ordinalzahlen* $\psi_v \alpha (v \leq \omega)$ *)*
Definition durch transfinite Rekursion über α*, simultan für alle* $v \leq \omega$.
Sei $C_v(\xi)$ *und* $\psi_v \xi$ *bereits definiert für alle* $\xi < \alpha,\ v \leq \omega$.
Dann sei:

$$\begin{aligned} C_v^0(\alpha) &:= \Omega_v, \\ C_v^{n+1}(\alpha) &:= C_v^n(\alpha) \cup \{\gamma \mid P(\gamma) \subset C_v^n(\alpha)\} \\ &\qquad \cup \{\psi_u \xi \mid \xi \in \alpha \cap C_v^n(\alpha) \wedge \xi \in C_u(\xi) \wedge u \leq \omega\}, \end{aligned}$$

und wir definieren:

$$C_v(\alpha) := \bigcup_{n<\omega} C_v^n(\alpha), \qquad \psi_v \alpha := \min\{\gamma \mid \gamma \notin C_v(\alpha)\}.$$

Lemma 2.4
(a) $\psi_v 0 = \Omega_v$.
(b) $\psi_v \alpha \in P$.
(c) $\Omega_v \leq \psi_v \alpha < \Omega_{v+1}$.
(d) $\alpha \leq \beta \Rightarrow C_v(\alpha) \subset C_v(\beta)$ *und* $\psi_v \alpha \leq \psi_v \beta$.
(e) $\gamma \in C_v(\alpha) \Leftrightarrow P(\gamma) \subset C_v(\alpha)$.
(f) $\xi, \eta \in C_v(\alpha) \Rightarrow \xi + \eta \in C_v(\alpha)$.
(g) $\xi + \eta \in C_v(\alpha) \Rightarrow \eta \in C_v(\alpha)$.
(h) $\alpha_0 < \alpha$ *und* $\forall \xi(\alpha_0 \leq \xi < \alpha \Rightarrow \xi \notin C_v(\alpha_0)) \Rightarrow C_v(\alpha_0) = C_v(\alpha)$.

Beweis:
(a) Durch Induktion nach n erhalten wir $C_v^n(0) = \Omega_v$.
(b) Angenommen $\psi_v\alpha \notin P$. Dann $P(\psi_v\alpha) \subset \psi_v\alpha \subset C_v(\alpha)$ also $\psi_v\alpha \in C_v(\alpha)$. Widerspruch.
(c) Aus $\Omega_v \subset C_v(\alpha)$ folgt $\Omega_v \leq \psi_v\alpha$. Offensichtlich ist die Kardinalität von $C_v(\alpha)$ kleiner als Ω_{v+1}. Also existiert ein $\gamma < \Omega_{v+1}$ mit $\gamma \notin C_v(\alpha)$ und damit $\psi_v\alpha < \Omega_{v+1}$.
(d) Trivial.
(e) Mit Hilfe von $\psi_u\xi \in P$ beweist man:
$\forall\gamma \in C_v^n(\alpha)(P(\gamma) \subset C_v^n(\alpha))$ durch Induktion nach n. Andererseits folgt aus $P(\gamma) \subset C_v(\alpha) \quad P(\gamma) \subset C_v^n(\alpha)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (da $P(\gamma)$ endlich und $C_v^i(\alpha) \subset C_v^{i+1}(\alpha)$) also $\gamma \in C_v^{n+1}(\alpha) \subset C_v(\alpha)$.
(f) Aus $\xi, \eta \in C_v(\alpha)$ erhalten wir $P(\xi + \eta) \subset P(\xi) \cup P(\eta) \subset C_v(\alpha)$ also $\xi + \eta \in C_v(\alpha)$.
(g) Aus $\xi + \eta \in C_v(\alpha)$ folgt $P(\eta) \subset P(\xi + \eta) \subset C_v(\alpha)$ und damit $\eta \in C_v(\alpha)$.
(h) Sei $\alpha_0 < \alpha$ und $\forall\xi(\alpha_0 \leq \xi < \alpha \rightarrow \xi \notin C_v(\alpha_0))$. Dann folgt aus (d) $C_v(\alpha_0) \subset C_v(\alpha)$ und durch Induktion nach n $\forall\gamma(\gamma \in C_v^n(\alpha) \rightarrow \gamma \in C_v(\alpha_0))$.

Bemerkung 2.5
Existiert $\alpha := \min\{\xi \mid \alpha_0 \leq \xi \in C_v(\alpha_0)\}$, so folgt $C_v(\alpha_0) = C_v(\alpha)$, $\psi_v\alpha = \psi_v\alpha_0$ und $\alpha \in C_v(\alpha)$

Beweis: Lemma 2.4(h).

Lemma 2.6
$\alpha < \beta$ und $\alpha \in C_v(\alpha) \Rightarrow \psi_v\alpha < \psi_v\beta$.

Beweis:
Aus der Prämisse folgt $\psi_v\alpha \leq \psi_v\beta$ und $\psi_v\alpha \in C_v(\beta)$. Also gilt $\psi_v\alpha < \psi_v\beta$, da $\psi_v\beta \notin C_v(\beta)$.

Lemma 2.7
(a) $\gamma = \psi_{u_i}\xi_i$ und $\xi_i \in C_{u_i}(\xi_i)(i = 0, 1) \Rightarrow u_0 = u_1$, $\xi_0 = \xi_1$.
(b) $\gamma \in C_v(\alpha)$ und $\Omega_v \leq \gamma \in P \Rightarrow \exists u, \xi(\gamma = \psi_u\xi$ und $\xi \in \alpha \cap C_v(\alpha) \cap C_u(\xi))$.
(c) $\Omega_v \leq \psi_u\xi \in C_v(\alpha)$ und $\xi \in C_u(\xi) \Rightarrow \xi \in \alpha \cap C_v(\alpha)$.

Beweis:
(a) folgt direkt aus Lemmata 2.4(c) und 2.6.
(b) Es gilt $P(\gamma) = \{\gamma\}$ und $\gamma \in C_v^{n+1}(\alpha) \backslash C_v^n(\alpha)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also folgt $\gamma = \psi_u \xi$ mit $\xi \in \alpha \cap C_v^n(\alpha)$ und $\xi \in C_u(\xi)$.
(c) Sei $\gamma := \psi_u(\xi)$. Nach (b) gilt $\gamma = \psi_w \zeta$ mit $\zeta \in \alpha \cap C_v(\alpha) \cap C_w(\zeta)$. Nach (a) folgt dann $w = u$ und $\xi = \zeta \in \alpha \cap C_v(\alpha)$.

Lemma 2.8
$C_v(\alpha) \cap \Omega_{v+1} = \psi_v \alpha$.

Beweis:
$\psi_v(\alpha) \subset C_v(\alpha) \cap \Omega_{v+1}$ gilt nach Definition 2.3 und Lemma 2.4(c).
Sei nun $\gamma \in C_v(\alpha) \cap \Omega_{v+1}$. Zu zeigen ist $\gamma < \psi_v \alpha$.
1. $\gamma < \Omega_v$: Dann gilt $\gamma < \psi_v \alpha$ nach Lemma 2.4(c).
2. $\Omega_v \leq \gamma \in P$: Dann gilt $\gamma = \psi_u \xi$ mit $\xi < \alpha$ und $\xi \in C_u(\xi)$ nach Lemma 2.7(b). Nach Lemma 2.4(c) erhalten wir $u = v$. Nach Lemma 2.6 folgt nun $\gamma = \psi_v \xi < \psi_v \alpha$.
3. $\Omega_v \leq \gamma \notin P$: Dann $\gamma_0 := \max P(\gamma) \in C_v(\alpha) \cap \Omega_{v+1}$, und mit 2. erhalten wir $\gamma_0 < \psi_v \alpha$. Da $\psi_v \alpha \in P$, folgt $\gamma < \psi_v \alpha$.

Lemma 2.9
(a) $\psi_v(\alpha + 1) = \begin{cases} \mathit{min}\{\gamma \in P \mid \psi_v \alpha < \gamma\}, & \textit{falls } \alpha \in C_v(\alpha), \\ \psi_v \alpha, & \textit{ansonsten.} \end{cases}$
(b) $\alpha \in \mathit{Lim} \Rightarrow \psi_v \alpha = \mathit{sup}\{\psi_v \xi \mid \xi < \alpha \textit{ und } \xi \in C_v(\xi)\}$.

Beweis:
(a) 1. Gilt $\alpha \in C_v(\alpha)$ so folgt nach Lemmata 2.4(b) und 2.6 $\psi_v(\alpha) < \psi_v(\alpha + 1) \in P$. Angenommen $\psi_v \alpha \leq \gamma < \psi_v(\alpha + 1)$ und $\gamma \in P$. Dann folgt nach 2.7(b) $\gamma = \psi_u \xi$ mit $\xi \leq \alpha$ und $\xi \in C_u(\xi)$. Aus $\psi_v \alpha \leq \psi_u \xi < \psi_v(\alpha + 1)$ folgt $u = v$. Aus $\psi_v(\alpha) \leq \psi_v \xi$ und $\xi \in C_v(\xi)$ folgt nach Lemma 2.6 $\alpha \leq \xi$. Also gilt $\alpha = \xi$ und $\gamma = \psi_v \alpha$.
2. Gilt $\alpha \notin C_v(\alpha)$ so gilt $C_v(\alpha) = C_v(\alpha + 1)$ nach Lemma 2.4(h).
(b) Nach Lemma 2.6 gilt $\psi_v \xi < \psi_v \alpha$ für alle $\xi < \alpha$ mit $\xi \in C_v(\xi)$. Sei nun $\psi_v 0 \leq \gamma < \psi_v \alpha$, und $\gamma_0 := \max P(\gamma)$. Dann $\Omega_v \leq \gamma_0 \in C_v(\alpha)$ und somit $\gamma_0 = \psi_v \xi$ mit $\xi < \alpha$ und $\xi \in C_v(\xi)$. Da $1 = \psi_0 0$ und $0 \in C_0(0) \subset C_v(\xi + 1)$, folgt $\xi + 1 \in C_v(\xi + 1)$. Nach Lemma 2.6 folgt dann $\gamma_0 = \psi_v(\xi) < \psi_v(\xi + 1)$, also $\gamma < \psi_v(\xi + 1)$.

Lemma 2.10
(a) $\alpha < \epsilon_0 \Rightarrow \alpha \in C_0(\alpha)$ *und* $\psi_0\alpha = \omega^\alpha$.
(b) $\alpha < \epsilon_{\Omega_v+1}$, $v \neq 0 \Rightarrow \alpha \in C_v(\alpha)$ *und* $\psi_v\alpha = \omega^{\Omega_v+\alpha}$.

Beweis von (a), (b) durch transfinite Induktion nach α:
Wir definieren
$\epsilon(v) := \begin{cases} \epsilon_0, & \text{falls } v = 0, \\ \epsilon_{\Omega_v+1}, & \text{falls } v > 0, \end{cases} \quad \alpha * v := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } v = 0, \\ \Omega_v + \alpha, & \text{falls } v > 0. \end{cases}$

1. Es gilt $0 \in C_v(0)$ und $\psi_v 0 \overset{2.4(a)}{=} \Omega_v = \omega^{0*v}$.
2. Gelte $\alpha \in C_v(\alpha)$ und $\psi_v\alpha = \omega^{\alpha*v}$. Dann gilt auch $\alpha + 1 \in C_v(\alpha + 1)$ und $\psi_v(\alpha + 1) = \omega^{\alpha*v+1} = \omega^{(\alpha+1)*v}$ nach Lemma 2.9(a).
3. Angenommen $\alpha \in \epsilon(v) \cap \mathit{Lim}$ und $\forall\xi < \alpha(\xi \in C_v(\xi) \wedge \psi_v\xi = \omega^{\xi*v})$. Dann erhalten wir nach Lemma 2.9(b) $\psi_v\alpha = \sup\{\omega^{\xi*v} \mid \xi < \alpha\} = \omega^{\alpha*v}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\alpha \in C_v(\alpha)$.
Falls $\alpha < \Omega_v$, ist dies trivial.
Falls $\alpha = \Omega_v$, gilt $\alpha = \psi_v 0 > 0$, also, da $0 \in C_v(0) \subset C_v(\alpha)$, $\alpha \in C_v(\alpha)$.
Falls $\Omega_v < \alpha < \epsilon(v) \quad \alpha \notin P$, folgt $P(\alpha) \subset \alpha$, also nach Induktionsvoraussetzung $\xi \in C_v(\xi) \subset C_v(\alpha)$für alle $\xi \in P(\alpha)$. Daraus folgt $\alpha \in C_v(\alpha)$.
Falls $\Omega_v < \alpha < \epsilon(v) \quad \alpha \in P$, folgt $\alpha = \omega^{\xi*v}$mit $\xi \leq (\xi * v) < \alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\xi \in C_v(\xi) \subset C_v(\alpha) \quad \psi_v(\xi) = \alpha$. Da $\xi < \alpha$, folgt also $\alpha = \psi_v(\xi) \in C_v(\alpha)$.

Lemma 2.11
(a) $C_v(\alpha) \subset \epsilon_{\Omega_\omega+1}$.
(b) $\epsilon_{\Omega_\omega+1} \leq \alpha \Rightarrow C_v(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) = C_v(\alpha)$.

Beweis:
(a) Mit Hilfe der Lemmata 2.10(b) und 2.4(c) beweist man $C_v^n(\alpha) \subset \epsilon_{\Omega_\omega+1}$ durch Induktion nach n.
(b) folgt aus (a) und Lemma 2.4(h).

Definition 2.12
Wir definieren für $\gamma \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ *eine endliche Menge* $G_u\gamma \subset On$*, so daß für jedes* α *gilt* $\gamma \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow G_u\gamma \subset \alpha$*. Diese Mengen werden in Kapitel 3 zur Definition von* OT *benötigt. Die Definition von* $G_u\gamma$ *erfolgt durch Induktion*

nach $\min\{n \in \mathbb{N} \mid \gamma \in C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1})\}$*:*

$$(1) \quad \gamma \notin P : G_u\gamma := \bigcup\{G_u\xi \mid \xi \in P(\gamma)\}.$$

$$(2) \quad \gamma = \psi_v\xi \quad \textit{mit} \quad \xi \in C_v(\xi) : G_u\gamma := \begin{cases} \{\xi\} \cup G_u\xi, & \textit{falls } u \leq v, \\ \emptyset, & \textit{falls } v < u. \end{cases}$$

Lemma 2.13
Falls $\gamma \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$*, gilt* $\gamma \in C_u(\alpha)$ *genau dann, wenn* $G_u\gamma \subset \alpha$*.*

Beweis durch Induktion nach $\min\{n \in \mathbb{N} \mid \gamma \in C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1})\}$:
1. $\gamma \notin P$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\xi \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow G_u\xi \subset \alpha$, für alle $\xi \in P(\gamma)$. Also folgt $P(\gamma) \subset C_u(\alpha) \Leftrightarrow G_u\gamma \subset \alpha$. Nach Lemma 2.4(e) gilt $\gamma \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow P(\gamma) \subset C_u(\alpha)$.
2. $\gamma = \psi_v\xi$ mit $\xi \in C_v(\xi)$:
2.1. $u \leq v$ Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\xi \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow G_u\xi \subset \alpha$, und nach Lemma 2.7(c) $\gamma \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow \xi \in \alpha \cap C_u(\alpha)$. Daraus folgt dann $\gamma \in C_u(\alpha) \Leftrightarrow \{\xi\} \cup G_u\xi \subset \alpha$. Nun gilt aber $G_u\gamma = \{\xi\} \cup G_u\xi$.
2.2. $v < u$: Dann gilt $\gamma \in \Omega_u \subset C_u(\alpha)$ und $G_u\gamma = \emptyset$.

Definition 2.14
Definition von $\textit{Länge}_s(\alpha)$ *für* $\alpha \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ *durch Rekursion über*
$n := \min\{n \mid \alpha \in C_s^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1})\}$.
Falls $n = 0$ *d.h.* $\alpha < \Omega_s$*, sei* $\textit{Länge}_s(\alpha) := 0$*.*
Falls $n = m + 1$ *und* $\alpha \notin P$*, gilt* $P(\alpha) \subset C_s^m(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$*,*
und es sei $\textit{Länge}_s(\alpha) := \max\{\textit{Länge}_s(\gamma) \mid \gamma \in P(\alpha)\}$*.*
Falls $n = m + 1$ *und* $\alpha = \psi_u\xi$ *mit* $\xi \in C_u(\xi) \cap \epsilon_{\Omega_\omega+1} \cap C_s^m(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$*,*
$s \leq u \leq \omega$*, sei* $\textit{Länge}_s(\alpha) := \textit{Länge}_s(\xi) + 1$*.*

Lemma 2.15
Sei $\alpha < \beta$*,* $\gamma \in C_s(\beta) \backslash C_s(\alpha)$*.*
Dann gilt $\textit{Länge}_s(\gamma) \geq \min\{\textit{Länge}_s(\delta) \mid \alpha \leq \delta < \beta,\ \delta \in C_s(\beta)\} + 1$*.*

Beweis:
$\gamma \in C_s(\beta) \backslash C_s(\alpha) \Rightarrow \gamma$ enthält Teilterm $\psi_u\xi$ mit $\alpha \leq \xi < \beta$, $u \geq s$, $\xi \in C_s(\beta) \cap C_u(\xi)$.

Folgerung 2.16
Sei $\alpha < \beta$ *und* $\forall\gamma((\alpha \leq \gamma < \beta \wedge \gamma \in C_s(\beta)) \rightarrow \textit{Länge}_s(\gamma) \geq \textit{Länge}_s(\alpha))$*.*
Gelte $\alpha \in C_s(\beta)$*. Dann gilt* $\alpha \in C_s(\alpha)$*.*

Beweis:
Wäre $\alpha \notin C_s(\alpha)$ so wäre nach Lemma 2.15
$\mathit{Länge}_s(\alpha) \geq \min\{\mathit{Länge}_s(\gamma) \mid \alpha \leq \gamma < \beta,\, \gamma \in C_s(\beta)\} + 1 \geq \mathit{Länge}_s(\alpha) + 1$.
Widerspruch.

Lemma 2.17
$\gamma =_{NF} \alpha + \beta,\, \gamma \in C_s(\gamma) \Rightarrow \alpha \in C_s(\alpha)$.

Beweis:
Aus $\gamma \in C_s(\gamma)$ folgt nach Lemma 2.4(e) $\alpha \in C_s(\gamma)$.
Sei $\alpha \leq \delta < \gamma = \alpha + \beta \;\; \delta \in C_s(\gamma) \Rightarrow \exists \xi (0 \leq \xi < \beta \wedge \delta = \alpha + \xi)$.
Da $\xi < \beta$, gilt $\delta =_{NF} \alpha + \xi$ also $\mathit{Länge}_s(\delta) \geq \mathit{Länge}_s(\alpha)$.
Nach Folgerung 2.16 folgt $\alpha \in C_s(\alpha)$.

Lemma 2.18
$\gamma =_{NF} \alpha + \beta \;\; \gamma \in C_n(\gamma) \;\; \psi_n(\gamma) \in C_s(\psi_n(\gamma))$
$\Rightarrow \alpha \in C_n(\alpha)$ *und* $\psi_n(\alpha) \in C_s(\psi_n(\alpha))$.

Beweis:
Nach Lemma 2.17 folgt $\alpha \in C_n(\alpha)$.
Falls $n < s$, ist $\psi_n(\alpha) < \Omega_s$ also $\psi_n(\alpha) \in C_s(\psi_n(\alpha))$.
Sei also $n \geq s$.
Sei $\psi_n(\alpha) \leq \delta < \psi_n(\gamma) \;\; \delta \in C_s(\psi_n(\gamma))$. Zeige: $\mathit{Länge}_s(\delta) \geq \mathit{Länge}_s(\psi_n(\alpha))$.
Sei $\delta =_{NF} \delta_1 + \delta_2$ mit $\delta_1 \in P$.
Dann folgt $\psi_n(\alpha) \leq \delta_1 < \psi_n(\gamma)$ also $\Omega_n \leq \delta_1 \in C_n(\gamma)$.
$\Rightarrow \exists \xi (\delta_1 = \psi_n \xi \wedge \xi \in C_n(\gamma) \cap C_n(\xi) \wedge \alpha \leq \xi < \gamma)$.
Wegen $\gamma =_{NF} \alpha + \beta$ folgt $\mathit{Länge}_s(\xi) \geq \mathit{Länge}_s(\alpha)$ und damit

$$\mathit{Länge}_s(\delta) \geq \mathit{Länge}_s(\delta_1) = \mathit{Länge}_s(\xi) + 1 \geq \mathit{Länge}_s(\alpha) + 1 = = \mathit{Länge}_s(\psi_n(\alpha)). \tag{1}$$

Weiterhin gilt $\Omega_s \leq \psi_n(\gamma) \in C_s(\psi_n(\gamma)) \;\; \gamma \in C_n(\gamma)$.
$\overset{2.7(c)}{\Rightarrow} \gamma \in C_s(\psi_n(\gamma)) \cap \psi_n(\gamma) \Rightarrow \alpha \in C_s(\psi_n(\gamma)) \cap \psi_n(\gamma)$,
und, da $\alpha \in C_n(\alpha)$, $\psi_n(\alpha) \in C_s(\psi_n(\gamma))$. (2)
(1),(2) und Folgerung 2.16 ergeben $\psi_n(\alpha) \in C_s(\psi_n(\alpha))$.

Kapitel 3

Das Bezeichnungssystem $(\mathrm{OT}, \prec)$

Die Überlegungen in Kapitel 2 legen nahe, ein Ordinalzahlbezeichnungssystem für $C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ einzuführen. Dieses System wird $(\mathrm{OT}, \prec)$ heißen und in diesem Kapitel definiert.

Definition 3.1
$D_0, D_1, \ldots, D_\omega$ sei eine Folge formaler Symbole.
Induktive Definition einer Menge T von Termen zusammen mit Länge(a) für $a \in \mathrm{T}$.

(T1)	$0 \in \mathrm{T}$, *Länge*$(0) := 0$.
(T2)	*Sind $a \in \mathrm{T}$ und $v \leq \omega$, dann ist auch $D_v a \in \mathrm{T}$; wir nennen $D_v a$ einen* Hauptterm, *Länge*$(D_v a) :=$ *Länge*$(a) + 1$.
(T3)	*Sind $a_0, \ldots, a_k \in \mathrm{T}$ Hauptterme und gilt $k \geq 1$, dann gilt $(a_0, \ldots, a_k) \in \mathrm{T}$,* *Länge*$(a_0, \ldots, a_k) := \max\{$*Länge*$(a_i) + 1 \mid 0 \leq i \leq k\}$.

Im folgenden bezeichnen die Buchstaben a, b, c, d immer Elemente von T. Ist a ein Hauptterm so sei $(a) := a$, weiter $(0) := 0$.
Weiter $P^{\mathrm{T}} := \{a \in \mathrm{T} \mid a \;\; \textit{Hauptterm}\} = \{D_v a \mid a \in \mathrm{T} \;\text{ und }\; v \leq \omega\}$,
und für $0 \neq a = (a_0, \ldots, a_k)$ sei $P^{\mathrm{T}}(a) := \{a_0, \ldots, a_k\}$, sowie $P^{\mathrm{T}}(0) := \emptyset$.

Definition 3.2
Induktive Definition von $a \prec b$ *für* $a, b \in \mathrm{T}$*:*

($\prec$ 1) $b \neq 0 \Rightarrow 0 \prec b$.
($\prec$ 2) $u < v$ *oder* ($u = v$ *und* $a \prec b$) $\Rightarrow D_u a \prec D_v b$.
($\prec$ 3) *Sei* $a = (a_0, \ldots, a_n), b = (b_0, \ldots, b_m), 1 \leq m + n$. *Dann gilt* $a \prec b$ *genau dann, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:*
   (i) $n < m$ *und* $a_i = b_i$ *für* $i \leq n$.
   (ii) $\exists k \leq \min\{n, m\}(a_k \prec b_k$ *und* $a_i = b_i$ *für* $i < n)$.

Weiter sei $a \preceq b :\Leftrightarrow (a \prec b \vee a = b)$.

Lemma 3.3
$(\prec)$ *ist eine lineare Ordnung auf* T.

Beweis: klar.

Abkürzungen 3.4
Sei $a \in \mathrm{T}$ *und* $M, M' \subset \mathrm{T}$*:*

$$\begin{aligned} M \preceq M' &\;:\Leftrightarrow\; \forall x \in M \exists y \in M'(x \preceq y), \\ M \prec a &\;:\Leftrightarrow\; \forall x \in M(x \prec a), \\ a \preceq M &\;:\Leftrightarrow\; \exists x \in M(a \preceq x). \end{aligned}$$

Definition 3.5
Induktive Definition von $G_u a \subset \mathrm{T}$ *für* $a \in \mathrm{T}$*:*

(G1) $G_u 0 := \emptyset$.
(G2) $G_u(a_0, \ldots, a_k) := G_u a_0 \cup \cdots \cup G_u a_k$.
(G3) $G_u D_v b := \begin{cases} \{b\} \cup G_u b, & \text{falls } u \leq v, \\ \emptyset, & \text{falls } v < u. \end{cases}$

Folgerung 3.6
(a) $a \in G_u b \Rightarrow G_u a \subset G_u b$.
(b) $a \in G_u b \Rightarrow$ *Länge*$(a) <$ *Länge*(b).

Beweis: klar.

Definition 3.7
Induktive Definition der Menge von Termen $\mathrm{OT}(\mathrm{OT} \subset \mathrm{T})$*:*

(OT1) $0 \in \mathrm{OT}$.
(OT2) *Sind* $a_0, \dots, a_k \in \mathrm{OT}$ $(k \geq 1)$ *Hauptterme mit* $a_k \preceq \cdots \preceq a_0$, *dann gilt* $(a_0, \dots, a_k) \in \mathrm{OT}$.
(OT3) *Ist* $b \in \mathrm{OT}$ *mit* $G_v b \prec b$, *dann* $D_v b \in \mathrm{OT}$.

Die Elemente von OT *heißen* Ordinalterme.
Wir definieren $P^{\mathrm{OT}} := \{a \in \mathrm{OT} \mid a \text{ Hauptterm}\} = P^{\mathrm{T}} \cap \mathrm{OT}$,
und für $a \in \mathrm{OT}$ *sei* $P^{\mathrm{OT}}(a) := P^{\mathrm{T}}(a)$.

Definition 3.8

Induktive Definition der Ordinalzahl $o(a)$ *für* $a \in \mathrm{T}$*:*
(o.1) $o(0) := 0$.
(o.2) $o((a_0, \dots, a_k)) := o(a_0) \# \cdots \# o(a_k) \quad (k \geq 1)$.
(o.3) $o(D_v b) := \psi_v o(b)$.

Für $M \subset \mathrm{OT}$ *sei* $o[M] := \{o(x) \mid x \in M\}$.

Es gilt dann $o[P^{\mathrm{OT}}] = o[\mathrm{OT}] \cap P$ *und* $o[P^{\mathrm{OT}}(a)] = P(o(a))$ *für* $a \in \mathrm{OT}$.

Folgerung 3.9
$a \in \mathrm{OT} \Rightarrow G_u a \subset \mathrm{OT}$.

Beweis: klar.

Lemma 3.10
Seien $a, c \in \mathrm{OT}$. *Dann gilt:*

(a) $o(a) \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega + 1})$.
(b) $G_u(o(a)) = \{o(x) \mid x \in G_u a\}$.
(c) $a \prec c \Rightarrow o(a) < o(c)$.

Beweis durch Induktion nach *Länge*(a), simultan für (a),(b),(c):
1. $a = 0$: trivial.
2. $a = D_v b$: Dann gilt $G_v b \prec b$ und $b \in \mathrm{OT}$.
(a) Nach Induktionsvoraussetzung gilt $o(b) \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ und $G_v o(b) = \{o(x) \mid x \in G_v b\} \subset o(b)$. Nach Lemmata 2.11, 2.13 folgern wir dann $o(b) \in \epsilon_{\Omega_\omega+1} \cap C_v(o(b))$ und damit $o(a) = \psi_v o(b) \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
(b) Da $o(b) \in C_v(o(b))$, gilt:

$G_u o(a) = \begin{cases} \{o(b)\} \cup G_u o(b), & \text{falls } u \leq v, \\ \emptyset, & \text{falls } v < u. \end{cases}$
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $G_u o(b) = \{o(x) \mid x \in G_u b\}$. Also folgt $G_u o(a) = \{o(x) \mid x \in G_u a\}$.
(c) beweisen wir dann durch Nebeninduktion nach $Länge(c)$:
(i) $c = D_u d$ mit $v < u$: $o(a) < \Omega_{v+1} \leq \Omega_u \leq \psi_u o(d) = o(c)$.
(ii)$c = D_v d$ mit $b \prec d$: Nach Hauptinduktionsvoraussetzung gilt $o(b) < o(d)$ und, wie in (a) gezeigt, $o(b) \in C_v(o(b))$. Daraus folgt $\psi_v o(b) < \psi_v o(d)$.
(iii) $c = (c_0, \ldots, c_m)$ mit $m \geq 1$ und $a \preceq c_0$:
Nach der Nebeninduktionsvoraussetzung folgt $o(a) \leq o(c_0)$ und deshalb $o(a) < o(c_0)\#o(c_1) \leq o(c)$.
3. $a = (a_0, \ldots, a_n)$ mit $n \geq 1$ und $a_n \preceq \cdots \preceq a_0$:
(a) Nach Induktionsvoraussetzung gilt $P(o(a)) = \{o(a_0), \ldots, o(a_n)\}$ $\subset C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, also $o(a) \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
(b) Nach Induktionsvoraussetzung gilt $G_u o(a_i) = \{o(x) \mid x \in G_u(a_i)\}$ für $i = 0, \ldots, n$. Also gilt:

$$G_u o(a) = \bigcup_{i=0}^{n} G_u o(a_i) = \{o(x) \mid x \in \bigcup_{i=0}^{n} G_u a_i\} = \{o(x) \mid x \in G_u a\}.$$

(c) Sei $c = (c_0, \ldots, c_m)$ mit $m \geq 0$.
(i) $n < m$ und $a_i = c_i$ für $i \leq n$: $o(a) = o(c_0)\# \cdots \#o(c_n) < o(c)$.
(ii) $k \leq \min\{n, m\}$ mit $a_k \prec c_k$ und $a_i = c_i$ für $i < k$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt $o(a_n) \leq \cdots \leq o(a_k) < o(c_k)$ also $o(a_k)\# \cdots \#o(a_n) < o(c_k) \leq o(c_k)\# \cdots \#o(c_m)$. Also folgt
$o(a) = o(c_0)\# \cdots \#o(c_{k-1})\#o(a_k)\# \cdots \#o(a_n) < o(c)$.

Lemma 3.11
(a) $C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) = \{o(x) \mid x \in \mathrm{OT}\}$.
(b) $\forall a \in \mathrm{OT}$ *mit* $a \prec D_1 0$ *gilt:*
$o(a) = Ordnungstyp(\{x \in \mathrm{OT} \mid x \prec a\}, \prec)$.
(c) $\psi_0 \epsilon_{\Omega_\omega+1} = Ordnungstyp(\{x \in \mathrm{OT} \mid x \prec D_1 0\}, \prec)$.

Beweis: (a) Durch Induktion nach n zeigen wir: $\alpha \in C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow \exists a \in \mathrm{OT}(\alpha = o(a))$. (Zusammen mit Lemma 3.10(a) folgt daraus die Behauptung (a)).
Der Fall $n = 0$ ist trivial.
Sei $\alpha \in C_0^{n+1}(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \backslash C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.

1. $\alpha = \alpha_0 + \cdots \alpha_k$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ und $\alpha_k \leq \cdots \leq \alpha_0$:
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es $a_0, \ldots, a_k \in \mathrm{OT}$ mit $o(a_i) = \alpha_i$ $(i = 0, \ldots, k)$. Nach Lemmata 3.3 und 3.10(c) erhalten wir $a_k \preceq \cdots \preceq a_0$, also $a := (a_0, \ldots, a_k) \in \mathrm{OT}$. Nun gilt $o(a) = o(a_0)\# \cdots o(a_k) = \alpha$.

2. $\alpha = \psi_v \xi$ mit $\xi \in C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap C_v(\xi)$:
Nach Induktionsvoraussetzung existiert $b \in \mathrm{OT}$ mit $o(b) = \xi$. Nach Lemmata 3.10 (b) und 2.13 erhalten wir $\{o(x) \mid x \in G_v b\} = G_v \xi \subset \xi = o(b)$. Nach Lemmata 3.3 und 3.10(c) folgt $G_v b \prec b$, also $D_v b \in \mathrm{OT}$ und $o(D_v b) = a$.
(b),(c) Nach (a) und Lemma 3.10(c) ist $(\{x \in \mathrm{OT}, x \prec a\}, \prec)$ isomorph zu $(C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap o(a), <)$ für alle $a \in \mathrm{OT}$. Nach Lemma 2.8 gilt $C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap o(D_1 0) = C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_1 = \psi_0 \epsilon_{\Omega_\omega+1}$. Daraus folgt (c). Für $a \prec D_1 0$ gilt $o(a) \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_1 = \psi_0 \epsilon_{\Omega_\omega+1}$, also $C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap o(a) = o(a)$.

Kapitel 4

Fundamentalfolgen für OT

Für eine verfeinerte beweistheoretische Analyse werden wir Fundamentalfolgen benötigen. Diese werden in diesem Kapitel eingeführt.

Definition 4.1
Definition von $a+b$ und $a \cdot n \in \mathrm{T}$: $a + 0 := 0 + a := a$,
$(a_0, \ldots, a_k) + (b_0, \ldots, b_m) := (a_0, \ldots, a_k, b_0, \ldots, b_m)$ *(falls* $(a_0, \ldots, a_k)$, $(b_0, \ldots, b_m) \neq 0$*)*,
$a \cdot 0 := 0$, $a \cdot (n+1) := a \cdot n + a$.

Lemma 4.2
$(a+b)+c = a+(b+c)$.

Beweis: klar.

Definition 4.3
$\mathrm{T}_v := \{0\} \cup \{(D_{u_0} a_0, \ldots, D_{u_n} a_n) \mid n \geq 0, a_0, \ldots, a_n \in \mathrm{T}, u_0, \ldots, u_n \leq v\}$.

Bemerkung 4.4
$\mathrm{T}_0 \subsetneqq \mathrm{T}_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathrm{T}_\omega = \mathrm{T}$, *und*
$\mathrm{T}_u = \{x \in \mathrm{T} \mid x \prec D_{u+1} 0\}$ *für* $u < \omega$.

Abkürzung 4.5
$1 := D_0 0$.
$\mathbb{N} := \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \ldots\} \subset \mathrm{OT} \cap \mathrm{T}_0$.

Definition 4.6
(Definition von dom(a) und a[z] für $a \in \mathrm{OT}$, $z \in dom(a)$).

([ ].0) $dom(0) := \emptyset$.
([ ].1) $dom(1) := \{0\}$; $1[0] := 0$.
([ ].2) $dom(D_{u+1}0) := \mathrm{T}_u$; $(D_{u+1}0)[z] := z$.
([ ].3) $dom(D_\omega 0) := \mathbb{N}$; $(D_\omega 0)[n] := D_{n+1}0$.
([ ].4) *Sei* $a = D_v b$ *mit* $b \neq 0$:
  (i) *Falls* $dom(b) = \{0\}$: $dom(a) = \mathbb{N}$,
  $a[n] := (D_v b[0]) \cdot (n+1)$.
  (ii) $dom(b) = \mathrm{T}_u (v \leq u < \omega)$: $dom(a) := \mathbb{N}$, $a[n] := D_v b[\zeta_n]$,
  wobei $\zeta_0 := D_u 0$, $\zeta_{n+1} := D_u b[\zeta_n]$.
  (iii) $dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{T}_u \mid u < v\}$: $dom(a) := dom(b)$,
  $a[z] := D_v b[z]$.
([ ].5) $a = (a_0, \ldots, a_k)(k \geq 1)$: $dom(a) := dom(a_k)$,
  $a[z] := (a_0, \ldots, a_{k-1}) + a_k[z]$.

Wir setzen $0[n] := 0$, $a[n] := a[0]$ *für* $a \in \mathrm{T}$ *mit* $dom(a) = \{0\}$.

Lemma 4.7

(a) $a \neq 0 \Leftrightarrow dom(a) \neq \emptyset$.
(b) $dom(a) = \{0\} \Leftrightarrow a = a[0] + 1$.

Beweis: klar.

Lemma 4.8

(a) $z \in dom(a) \Rightarrow a[z] \prec a$.
(b) $z, z' \in dom(a) = \mathrm{T}_u$ *und* $z \prec z' \Rightarrow a[z] \prec a[z']$.
(c) $0 \neq a \in \mathrm{T}_v \Rightarrow dom(a) \in \{\{0\}, \mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{T}_u \mid u < v\}$ *und* $a[z] \in \mathrm{T}_v$ *für alle* $z \in dom(a)$.
(d) $dom(a) = \mathbb{N} \Rightarrow a[n] \prec a[n+1]$.

Beweis durch Induktion nach $L\ddot{a}nge(a)$:
(a) Alle Fälle folgen direkt mit Induktionsvoraussetzung, im Fall ([ ].4)(ii) folgt durch Nebeninduktion nach n $\zeta_n \in T_u = dom(b)$ und damit nach der Hauptinduktionsvoraussetzung $a[n] = D_v b[\zeta_n] \prec D_v b = a$.
(b) leicht.
(c) leicht.
(d) Die Fälle $a = D_\omega 0$, $D_v(b+1)$ sind klar.
Die Fälle $a = D_v b$ mit $dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{T_u \mid u < v\}$ sowie $a = (a_0, \ldots, a_k)$ $(k \geq 1)$ folgen sofort mit Induktionsvoraussetzung.
Sei $a = D_v b$ $dom(b) = T_u$ $u \geq v$, und $\zeta_0 := D_u 0$, $\zeta_{n+1} := D_u b[\zeta_n]$.
Durch Induktion nach n zeigt man $\zeta_n \prec \zeta_{n+1}$.
1. $\zeta_0 = D_u 0 \prec D_u b[D_u 0]$, denn nach (b) gilt $0 \preceq b[0] \prec b[D_u 0]$, also $0 \prec b[D_u 0]$.
2. $\zeta_n \prec \zeta_{n+1} \overset{(b)}{\Rightarrow} b[\zeta_n] \prec b[\zeta_{n+1}] \Rightarrow \zeta_{n+1} = D_u b[\zeta_n] \prec D_u b[\zeta_{n+1}] = \zeta_{n+2}$.
Aus $\zeta_n \prec \zeta_{n+1}$ folgt mit (b) $a[n] = D_v b[\zeta_n] \prec D_v b[\zeta_{n+1}] = a[n+1]$.

Lemma 4.9
$a, z \in \mathrm{OT}$ *und* $z \in dom(a) \Rightarrow a[z] \in \mathrm{OT}$.

Beweis: siehe später.

Definition 4.10
$G_u^0 a := G_u a \cup \{0\}$.
$b \lhd_z a :\Leftrightarrow b \prec a$ *und* $\forall u \forall c (b \preceq c \preceq a \Rightarrow G_u b \preceq G_u c \cup G_u^0 z)$.

Lemma 4.11
$b \lhd_z a, G_u a \prec a, G_u z \prec b \Rightarrow G_u b \prec b$.

Beweis:
Es gilt zunächst $G_u b \preceq G_u a \cup G_u^0 z \prec a$.
Angenommen $b \preceq G_u b$. Dann existiert ein Teilterm d von b minimaler Länge, so daß $b \preceq G_u d \prec a$. Aus der Minimalität von d folgt $d = D_v c$ mit $G_u c \prec b \preceq c \prec a$. Da $b \lhd_z a$ und $G_u z \prec b$ erhalten wir $G_u b \preceq G_u c \cup G_u^0 z \prec b$. Widerspruch.

Lemma 4.12
$b_0 \lhd_z b \Rightarrow a + b_0 \lhd_z a + b$ *und* $D_v b_0 \lhd_z D_v b$.

Beweis:
1. Sei $a + b_0 \preceq c \preceq a + b$. Dann folgt $c = a + c_0$ mit $b_0 \preceq c \preceq b$. Also folgt: $G_u(a + b_0) = G_u a \cup G_u b_0 \preceq G_u a \cup G_u c_0 \cup G_u^0 z = G_u c \cup G_u^0 z$.

2. Sei $D_v b_0 \preceq c \preceq D_v b$. Dann folgt $c = (D_v c_0) + c_1$ mit $b_0 \preceq c_0 \preceq b$. Da $b_0 \triangleleft_z b$, folgt $G_u b_0 \preceq G_u c_0 \cup G_u^0 z$. Falls nun $v \geq u$, folgt:
$G_u(D_v b_0) = \{b_0\} \cup G_u b_0 \preceq \{c_0\} \cup G_u c_0 \cup G_u^0 z \subset G_u c \cup G_u^0 z$.
Falls $v < u$, ist $G_u(D_v b_0) = \emptyset$.

Lemma 4.13
$a \in \mathrm{T}$ *und* $z \in dom(a) \Rightarrow a[z] \triangleleft_z a$.

Beweis durch Induktion nach $Länge(a)$:
Nach Lemma 4.8(a) gilt $a[z] \prec a$.
Sei $a[z] \preceq c \preceq a$. Zu zeigen ist $G_u a \preceq G_u c \cup G_u^0 z$.
1. $a = 1$ oder $a = D_{v+1}0$: trivial.
2. $a = D_\omega 0$: $G_u a[z] = G_u D_{z+1} 0 \subset \{0\}$.
3. $a = D_v b$ mit $dom(b) = \{0\}$: Dann gilt $a[z] = (D_v b[0]) \cdot (z + 1)$ und $G_u a[z] = G_u D_v b[0]$. Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 4.12 gilt $D_v b[0] \triangleleft_0 D_v b = a$. Weiter gilt $D_v b[0] \preceq c \preceq a$, also $G_u a[z] = G_u(D_v(b[0])) \preceq G_u c \cup \{0\}$.
4. $a = D_v b$ und $dom(b) = T_w$ und $v \leq w < \omega$:
$a[n] = D_v b[\zeta_n]$ mit $\zeta_0 := D_w 0$, $\zeta_{n+1} := D_w b[\zeta_n]$.
Falls $v < u$, ist $G_u a = \emptyset \preceq G_u c \cup G_u^0 z$.
Sei $u \leq v$. Dann gilt $c = (D_v c_0) + c_1$ mit $b[\zeta_n] \preceq c_0 \preceq b$.
Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\forall m (b[\zeta_m] \triangleleft_{\zeta_m} b)$. (1)
Durch Nebeninduktion nach m zeigen wir $\forall m \leq n \ (G_u b[\zeta_m] \preceq G_u^0 c)$: (2)

Sei $m \leq n$. Dann gilt $b[\zeta_m] \preceq b[\zeta_n] \preceq c_0$.

$$b[\zeta_m] \triangleleft_{\zeta_m} b \wedge b[\zeta_m] \preceq b[\zeta_n] \preceq c_0 \preceq b \quad \Rightarrow \quad G_u b[\zeta_m] \preceq G_u c_0 \cup G_u^0 \zeta_m. \qquad (*)$$

1. $m = 0$: $G_u b[\zeta_0] \overset{(*)}{\preceq} G_u c_0 \cup G_u^0 D_w 0 \subset G_u^0 c$.

2. $m > 0$: $G_u b[\zeta_m] \overset{(*)}{\preceq} G_u c_0 \cup G_u^0 D_w b[\zeta_{m-1}] = G_u c_0 \cup \{b[\zeta_{m-1}]\} \cup G_u^0 b[\zeta_{m-1}]$

$$\overset{\text{Neben-IV}}{\preceq} \{b[\zeta_{m-1}]\} \cup G_u c_0 \cup G_u^0 c \preceq \{c_0\} \cup G_u^0 c = G_u^0 c.$$

Aus (2) folgt dann $G_u a[n] = \{b[\zeta_n]\} \cup G_u b[\zeta_n] \underset{(2)}{\preceq} \{b[\zeta_n]\} \cup G_u^0 c \preceq \{c_0\} \cup G_u^0 c = G_u^0 c$.
5. $a = D_v b$ mit $dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{T_w \mid w < v\}$: Nach Induktionsvoraussetzung folgt $b[z] \triangleleft_z b$ und mit Lemma 4.12 $a[z] = D_v b[z] \triangleleft_z D_v b = a$.

6. $a = (a_0, \ldots, a_k)$ $(k \geq 1)$: Nach Induktionsvoraussetzung folgt $a_k[z] \lhd_z a_k$, also mit Lemma 4.12 $a[z] = (a_0, \ldots, a_{k-1}) + a_k[z] \lhd_z (a_0, \ldots, a_{k-1}) + a_k = a$.

Beweis von Lemma 4.9 durch Induktion nach *Länge*(a):

1. $a = (a_0, \ldots, a_k) \in \mathrm{OT}$: Dann sind $a_0, \ldots, a_k \in \mathrm{OT}$ und $a_k[z] \overset{4.8(a)}{\prec} a_k \preceq \cdots \preceq a_0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_k[z] \in \mathrm{OT}$, also $a[z] = (a_0, \ldots, a_{k-1}) + a_k[z] \in \mathrm{OT}$
2. $a = D_v b \in \mathrm{OT}$: Dann gilt $b \in \mathrm{OT}$ und $G_v b \prec b$.
2.1. $b = 0$: Dann gilt $a[z] = z \in \mathrm{OT}$ oder $a[z] = D_{z+1}0 \in \mathrm{OT}$.
2.2. $dom(b) = \{0\}$: Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 4.13 gilt $b[0] \in \mathrm{OT}$ und $b[0] \lhd_0 0$. Nach Lemma 4.11 folgt aus $b[0] \lhd_0 b$ und $G_v b \prec b$ $G_v b[0] \prec b[0]$
Also gilt $a[z] = (D_v b[0]) \cdot (z+1) \in \mathrm{OT}$.
2.3. $dom(b) = T_u$ mit $v \leq u < \omega$: Zu zeigen ist $D_v b[\zeta_z] \in \mathrm{OT}$ wobei $\zeta_0 := D_u 0$, $\zeta_{n+1} := D_u b[\zeta_n]$
Zeige: $z' \in \mathrm{OT} \cap T_u \wedge G_v z' \prec b[z'] \Rightarrow D_v b[z'] \in \mathrm{OT}$ (1)
Beweis von (1): Nach Induktionsvoraussetzung folgt aus $z', b \in \mathrm{OT}$ und $z' \in T_u = dom(b)$ zunächst $b[z'] \in \mathrm{OT}$. Nach Lemma 4.13 gilt $b[z'] \lhd_{z'} b$, also, da $G_v z' \prec b[z']$ und $G_v b \prec b$, mit Lemma 4.11 $G_v b[z'] \prec b[z']$. Es folgt $D_v b[z'] \in \mathrm{OT}$.

Mit Hilfe von (1) folgt dann $D_v b[\zeta_z] \in \mathrm{OT}$ durch Nebeninduktion nach z:

1. $z = 0$: $D_u 0 \in \mathrm{OT} \cap T_u \wedge G_v D_u 0 \subset \{0\} \prec b[D_u 0] \overset{(1)}{\Rightarrow} D_v b[D_u 0] \in \mathrm{OT}$.
2. $z > 0$: Nach Nebeninduktionsvoraussetzung gilt $D_v b[\zeta_{z-1}] \in \mathrm{OT}$, also $b[\zeta_{z-1}] \in \mathrm{OT} \wedge G_v b[\zeta_{z-1}] \prec b[\zeta_{z-1}]$. Da $v \leq u$, folgt $G_u b[\zeta_{z-1}] \prec b[\zeta_{z-1}]$, also wegen $b[\zeta_{z-1}] \in \mathrm{OT}$ gilt $\zeta_z = D_u b[\zeta_{z-1}] \in \mathrm{OT}$. Aus $\zeta_z \in \mathrm{OT}$ und $G_v \zeta_z = \{b[\zeta_{z-1}]\} \cup G_v b[\zeta_{z-1}] \preceq b[\zeta_{z-1}] \prec b[\zeta_z]$ folgt mit (1) dann $D_v b[\zeta_z] \in \mathrm{OT}$.
2.4. $dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{T_u \mid u < v\}$: Nach Induktionsvoraussetzung und Lemma 4.13 gilt $b[z] \in \mathrm{OT}$ und $b[z] \lhd_z b$. Da $z \in dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{T_u \mid u < v\}$ gilt $G_v z = \emptyset \prec b[z]$. Nach Lemma 4.11 folgt aus $b[z] \lhd_z b$, $G_v b \prec b$, $G_v z \prec b[z]$ dann $G_v b[z] \prec b[z]$. Also gilt $a[z] = D_v b[z] \in \mathrm{OT}$.

Lemma 4.14
$dom(b) = \mathrm{T}_u$ und $G_u c \prec a$ und $c \prec b \Rightarrow c \prec b[D_u a]$.

Beweis durch Induktion nach *Länge*(b):
A. $b = D_{u+1}0$: $G_u c \prec a \wedge c \prec D_{u+1}0 \Rightarrow c \prec D_u a = b[D_u a]$.

[Falls $c = D_w c_0 + c_1$ mit $w < u$, ist dies klar.
Falls $c = D_u c_0 + c_1$, folgt aus $c_0 \in G_u c \prec a \quad c \prec D_u a$.]
B. $b = D_v b_0$ mit $u < v$ und $dom(b_0) = T_u$, $b[z] = D_v b_0[z]$:
Fallunterscheidung:
1. Falls $c = D_w c_0 + c_1$ mit $w < v$, ist die Behauptung trivial.
2. Falls $c = D_v c_0 + c_1$, folgt aus $G_u c_0 \subset G_u c \prec a$ und $c_0 \prec b_0$ mit Induktionsvoraussetzung $c_0 \prec b_0[D_u a]$. Daraus folgt nun $c = D_v c_0 + c_1 \prec D_v b_0[D_u a] = b[D_u a]$.
C. $b = (b_0, \ldots, b_k)$ mit $k \geq 1$, $dom(b_k) = T_u$. Dann gilt $b[z] = (b_0, \ldots, b_{k-1}) + b_k[z]$. Sei $c = (c_0, \ldots, c_l)$ mit $l \geq 0$.
1. $l < k \wedge c_0 = b_0 \wedge \cdots \wedge c_l = b_l$: Wegen $b_k[D_u a] \neq 0$ folgt $c \prec b[D_u a]$.
2. Sei $m \leq \min\{k, l\}$ und $c_m \prec b_m$ und $\forall i < m(c_i = b_i)$.
2.1. $m < k$: Dann gilt $c \prec (b_0, \ldots, b_m) \prec b[D_u a]$.
2.2. $m = k$: Dann folgt aus $G_u c_k \subset G_u c \prec a$ und $c_k \prec b_k$ mit Induktionsvoraussetzung $c_k \prec b_k[D_u a]$. Also folgt $c = (c_0, \ldots, c_k, \ldots, c_l) \prec (b_0, \ldots, b_{k-1}) + b_k[D_u a] = b[D_u a]$.

Satz 4.15
$a, c \in \mathrm{OT}$ und $o(a)$ Limeszahl und $a[0] \preceq c \prec a$
$\Rightarrow \exists x \in \mathrm{OT} \cap dom(a)\ (a[x] \preceq c \prec a[x+1])$.

Beweis durch Induktion nach *Länge*(a).
1. $a = D_{u+1}0$: Aus $c \prec a$ folgt $c \in T_u = dom(a)$ also $a[c] = c \prec c + 1 = a[c+1]$.
2. $a = D_\omega 0$: Aus $D_1 0 = a[0] \preceq c \prec a$ folgt $c = D_u c_0 + c_1$ mit $1 \leq u < \omega$. Also $a[u-1] = D_u 0 \preceq c \prec D_{u+1} 0 = a[u]$.
3. $a = D_v b$ mit $b \neq 0$.
3.1. $dom(b) = \{0\}$: Dann gilt $b = b[0] + 1$. Aus $D_v b[0] = a[0] \preceq c \prec D_v b = a$ folgt dann $c = (D_v b[0]) \cdot (n+1) + c_1$ mit (da $c \in \mathrm{OT}$) $c_1 \prec D_v b[0]$.
Es folgt $a[n] = (D_v b[0]) \cdot (n+1) \preceq c \prec (D_v b[0]) \cdot (n+2) = a[n+1]$.
3.2. $dom(b) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{T_u \mid u < v\}$: Dann gilt $dom(a) = dom(b)$ und $a[z] = D_v b[z]$.
Aus $D_v b[0] = a[0] \preceq c \prec a = D_v b$ folgt $c = (D_v c_0) + c_1$ mit $b[0] \preceq c_0 \prec b$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $b[z] \preceq c_0 \prec b[z+1]$ für ein $z \in \mathrm{OT} \cap dom(b) = \mathrm{OT} \cap dom(a)$.
Es folgt $a[z] = D_v b[z] \preceq D_v c_0 \prec D_v b[z+1] = a[z+1]$, also $a[z] \preceq c \prec a[z+1]$.

3.3. $dom(b) = T_u$ mit $v \le u < \omega$: Dann gilt $dom(a) = \mathbb{N}$, $a[n] = D_v b[\zeta_n]$ mit $\zeta_0 = D_u 0$, $\zeta_{n+1} = D_u b[\zeta_n]$. Aus $a[0] \preceq c \prec a$ folgt $c = (D_v c_0) + c_1$ mit $b[D_u 0] \preceq c_0 \prec b$. Durch Nebeninduktion nach $Länge(d)$ zeigen wir:
$G_u d \prec b \Rightarrow \exists n\ (G_u d \prec b[\zeta_n])$. (∗)

Beweis: Sei zunächst $d = D_w d_0$ mit $u \le w$. Dann gilt $\{d_0\} \cup G_u d_0 = G_u d \prec b$, also nach Nebeninduktionsvoraussetzung $\exists m(G_u d_0 \prec b[\zeta_m])$. Nach Lemma 4.14 folgt aus $dom(b) = T_u \wedge G_u d_0 \prec b[\zeta_m] \wedge d_0 \prec b$ zunächst $d_0 \prec b[D_u b[\zeta_m]] = b[\zeta_{m+1}]$, also $G_u d = \{d_0\} \cup G_u d_0 \prec b[\zeta_{m+1}]$.
Falls $d = D_w d_0$ mit $w < u$, gilt $G_u d = \emptyset \prec b[\zeta_0]$.
Der Fall $d = (d_0, \dots, d_r)$ mit $r \ge 1$ folgt direkt aus der Nebeninduktionsvoraussetzung.

Aus $c \in$ OT und $v \le u$ folgt nun $G_u c_0 \subset G_v c_0 \prec c_0 \prec b$, also mit (∗) $\exists n(G_u c_0 \prec b[\zeta_n])$. Mit Lemma 4.14 folgt nun aus $dom(b) = T_u \wedge G_u c_0 \prec b[\zeta_n] \wedge c_0 \prec b$ dann $c_0 \prec b[D_u b[\zeta_n]] = b[\zeta_{n+1}]$. Also gilt $c = D_v c_0 + c_1 \prec D_v b[\zeta_{n+1}] = a[n+1]$. Ist nun n minimal mit $c \prec a[n+1]$, so folgt $a[n] \preceq c \prec a[n+1]$.

4. $a = (a_0, \dots, a_k)$ mit $k \ge 1$: Dann gilt $dom(a) = dom(a_k)$ und $a[z] = (a_0, \dots, a_{k-1}) + a_k[z]$. Aus $(a_0, \dots, a_{k-1}) + a_k[0] \preceq c \prec (a_0, \dots, a_{k-1}) + a_k$ folgt $c = (a_0, \dots, a_{k-1}) + c'$ mit $a_k[0] \preceq c' \prec a_k$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $a_k[z] \preceq c' \prec a_k[z+1]$ für ein $z \in dom(a_k) \cap \mathrm{OT} = dom(a) \cap \mathrm{OT}$. Also gilt $a[z] \preceq c \prec a[z+1]$.

Folgerung 4.16
$a \in$ OT, $a \prec D_1 0$, $o(a)$ Limeszahl $\Rightarrow dom(a) = \mathbb{N}$, $o(a) = \sup\{o(a[n]) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis:
$dom(a) = \mathbb{N}$ folgt nach Lemma 4.7(a),(b).
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Lemmata 4.8(a) und 3.10 (c) $o(a[n]) \prec o(a)$, also auch $\sup\{o(a[n]) \mid n \in \mathbb{N}\} \le o(a)$.
Sei umgekehrt $\gamma < o(a)$.
Nach Lemma 3.11 (a) existiert wegen $a \prec D_1 0$ ein $b \in$ OT mit $\gamma = o(b)$.
Nach Satz 4.15 folgt $\exists n \in \mathbb{N}\quad (b \prec a[n])$, also $\gamma = o(b) < o(a[n])$.
Also gilt $\sup\{o(a[n]) \mid n \in \mathbb{N}\} \ge o(a)$.

Definition 4.17

(1) $T_u^{Ord} := \{o(a) \mid a \in T_u \cap \mathrm{OT}\} = C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{u+1}$, $\mathbb{N}^{Ord} := \omega \subset Ord$.
(2) $\alpha, \beta \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, $a, b \in \mathrm{OT}$, $o(a) = \alpha$, $o(b) = \beta$, $b \in dom(a)$.
Dann $dom(\alpha) := \emptyset$ *bzw.* $\{0\}$ *bzw.* $\mathbb{N}^{Ord}$ *bzw.* T_u^{Ord}*, falls* $dom(a) = \emptyset$ *bzw.* $\{0\}$ *bzw.* $\mathbb{N}$ *bzw.* T_u*, und* $\alpha[\beta] := o(a[b])$.
Wir schreiben im folgenden für $\mathbb{N}^{Ord}$ *kurz* $\mathbb{N}$ *und für* T_u^{Ord} T_u*, also in vereinfachender Kurzschreibweise* $dom(\alpha) = dom(a)$*, falls* $\alpha = o(a)$.

Kapitel 5

Berechnung von ω^α für $\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$

In die Definition von ψ_v gingen die Funktionen ω^α und $\phi_\alpha\beta$ nicht ein und auch eine Multiplikation ist zunächst nicht bekannt. In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich ω^α für $\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ verhält. Mit Hilfe der Cantor-Normalform können wir damit auch die Multiplikation in $C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ berechnen.

Lemma 5.1
$\beta \in C_s(\beta) \cap C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, $dom(\beta) = \mathrm{T}_s$, $\alpha < \psi_s\beta$, $\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$
$\Rightarrow \alpha < \psi_s(\beta[\alpha])$.

Beweis:
Der Fall $\alpha < \psi_s 0$ ist klar.
Gilt $\psi_s 0 \leq \alpha < \psi_s(\beta[\psi_s 0])$, dann ist die Behauptung ebenfalls klar.
Ansonsten folgt $\psi_s(\beta[\psi_s 0]) = (\psi_s\beta)[0] \leq \alpha < \psi_s\beta$.

$$\overset{4.15}{\Rightarrow} \exists n \ \ ((\psi_s\beta)[n] \leq \alpha < (\psi_s\beta)[n+1]).$$
$$\begin{aligned}\Rightarrow \alpha < (\psi_s\beta)[n+1] &= \psi_s(\beta[\zeta_{n+1}]) \\ &= \psi_s(\beta[\psi_s(\beta[\zeta_n])]) \\ &= \psi_s(\beta[(\psi_s\beta)[n]]) \\ &\leq \psi_s(\beta[\alpha]).\end{aligned}$$

Lemma 5.2

Sei $\Omega_s \leq \beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \quad \gamma \in On.$
$\Rightarrow \exists \rho, \nu \in On \ (\beta = \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho) + \nu \wedge \nu < \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)) \wedge {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho \in C_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho)).$

Beweis:
Sei $\beta =_{NF} \beta_1 + \beta_2 \quad \beta_1 \in P.$
$\Rightarrow \Omega_s \leq \beta_1 \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}).$
$\Rightarrow \exists \xi(\xi \in C_s(\xi) \wedge \beta_1 = \psi_s(\xi)).$
$\Rightarrow \exists \rho({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho \leq \xi < {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)).$
Da $\xi \in C_s(\xi)$, folgt nach Lemma 2.6 $\psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho) \leq \psi_s(\xi) < \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)).$
$\exists \alpha(\alpha \in C_s(\alpha) \wedge \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho) = \psi_s(\alpha)).$
$\Rightarrow {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho \leq \alpha < {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1) = {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho + {\Omega_{s+1}}^\gamma.$
$\Rightarrow \exists \alpha_1(\alpha = {\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho + \alpha_1 \wedge \alpha_1 \leq {\Omega_{s+1}}^\gamma).$
Aus $\alpha \in C_s(\alpha)$ folgt dann aber nach Lemma 2.17 ${\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho \in C_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho).$
Falls $\beta_1 = \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho)$, folgt $\beta = \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho) + \beta_2,$
mit $\beta_2 < \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)),$
ansonsten ist mit $\beta_1 < \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)) \quad \beta < \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot (\rho+1)),$
und $\beta = \psi_s({\Omega_{s+1}}^\gamma \cdot \rho) + \beta.$

Satz 5.3
$\beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1},\ \beta \geq \Omega_s.$
Dann gibt es α, δ, *so daß* $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$, $1 + \beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta,$
$\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha),$
und es gilt dann:
$\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$ *und* $\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta).$

Beweis:
Wegen Lemma 2.10(a) sei o.E. $\beta \geq \omega$, also $\beta = 1 + \beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta.$
1) Nach Lemma 5.2 folgt: Jedes β besitzt eine Darstellung
$\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta$ mit $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1)), \Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha).$

2) Zeige $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta$ mit $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$
$\Rightarrow \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta).$
Wegen $\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \subset C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$
genügt es zu zeigen $\delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta).$
Fall i) $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha).$
$\delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \subset C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta).$

Fall ii) $\delta \in P$, $\delta \geq \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$.

Da $\beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$ und dieses Ordinalzahlabschnitt,
folgt, da $\delta \leq \beta$, $\delta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$,
$\overset{\delta\geq\Omega_s,\ \text{Lem. 2.7(b)}}{\Rightarrow} \exists \xi \in On\ (\delta = \psi_s\xi \wedge \xi \in C_s(\xi))$.
Aus $\psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \leq \delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$ und
$\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$
folgt $\Omega_{s+1} \cdot \alpha \leq \xi < \Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1)$, also $\exists \delta' < \Omega_{s+1}\ (\xi = \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta')$.
Weiter $\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta' = \xi \in C_s(\xi)$.
$\overset{2.4(\text{g})}{\Rightarrow} \delta' \in C_s(\xi)$.
$\overset{\delta'<\Omega_{s+1}}{\Rightarrow} \delta' < \psi_s(\xi) = \delta$.
$\Rightarrow \xi = \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta' < \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta$.
$\overset{\xi\in C_s(\xi)}{\Rightarrow} \delta = \psi_s\xi < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.
$\Rightarrow \delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.

Fall iii) $\delta \notin P$.

Aus Fall i),ii) folgt $\forall \tilde{\delta} \in P(\delta)\ (\tilde{\delta} \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \tilde{\delta}) \subset C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta))$
also $\delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.

3) Zeige: $(\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta \quad \text{mit} \quad \delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$
$\Rightarrow \omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta))$.

Beweis durch transfinite Induktion nach β:
(Beachte im folgenden $C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$ ist ein Ordinalzahlabschnitt.)

Fall 1: $\beta = \omega$.
$\beta = 1 + \beta = \psi_0(\Omega_1 \cdot 0) + \beta$.
$\omega^\beta \overset{\text{Lem. 2.10(a)}}{=} \psi_0(\beta) = \psi_0(\psi_0(\Omega_1 \cdot 0) + \beta)$.

Fall 2: $\beta = \Omega_s$ $(s \neq 0)$.
$\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot 0)$, $\omega^\beta = \Omega_s = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot 0)$.

Fall 3: $\beta = \tilde{\beta} + 1$.
Sei $\tilde{\beta} = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta$ $(\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$
und nach 1) $\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.
Nach Lemma 2.9(a) gilt
$\omega^{\beta+1} = \min\{\gamma \in P \mid \omega^\beta < \gamma\}$
$\overset{IV}{=} \min\{\gamma \in P \mid \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta) < \gamma\}$
$= \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + (\delta+1))$.

Fall 4 $\beta \in Lim$.

Fall 4.1. $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta$ mit $0 < \delta \in Lim$ und $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha+1))$.

$\psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$

$\overset{2.9(b)}{=} \sup\{\psi_s\gamma \mid \gamma < \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta \wedge \gamma \in C_s(\gamma)\}$

$= \sup\{\psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \gamma) \mid \gamma < \delta \;\; \Omega_{s+1} \cdot \alpha + \gamma \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \gamma)\}$

[denn $\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$ und $\psi(\cdot)$ ist monoton]

$\overset{IV}{=} \sup\{\omega^{\psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha)+\gamma} \mid \gamma < \delta\}$

$= \omega^{\psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha)+\delta}$

$= \omega^\beta$.

Fall 4.2. $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$ $(\alpha \neq 0)$.

Zu zeigen ist $\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) = \beta$, d.h. β ist Epsilonzahl,
d.h. $\forall \gamma < \beta \quad (\omega^\gamma < \beta)$.
Sei also $\gamma < \beta$.
Falls $\gamma < \Omega_s$, folgt $\omega^\gamma < \Omega_s < \beta$.
Falls $\gamma \geq \Omega_s$, folgt aus $\beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$ Ordinalzahlabschnitt
$\gamma \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$.
$\overset{1)}{\Rightarrow} \gamma = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha}) + \tilde{\delta}$ mit $\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha})$
und nach Induktionsvoraussetzung folgt $\omega^\gamma = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta})$ und
$\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta} \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta})$.
Da $\gamma < \beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$, folgt $\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} < \Omega_{s+1} \cdot \alpha$, also $\tilde{\alpha} < \alpha$.
Also gilt $\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta} < \Omega_{s+1} \cdot (\tilde{\alpha} + 1) \leq \Omega_{s+1} \cdot \alpha$,
und da $\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta} \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta})$,
folgt $\omega^\gamma \overset{IV}{=} \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \tilde{\alpha} + \tilde{\delta}) < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$.

Folgerung 5.4
Sei $\Omega_s \leq \beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$, $\beta \neq 1$.
β ist Epsilonzahl $\Leftrightarrow \exists \alpha(\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \wedge \Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha))$.

Beweis: „ $\Leftarrow$ “ ist klar nach Lemma 5.3.
Sei also β Epsilonzahl, α, δ wie in Lemma 5.3,
d.h. $1 + \beta = \psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha) + \delta$ mit $\delta < \psi_s(\Omega_{s+1}\cdot(\alpha+1))$ und $\Omega_{s+1}\cdot\alpha \in C_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha)$.
Dann folgt $\beta = \omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.
Wäre $\delta \neq 0$, so wäre $\beta = \delta < \Omega_{s+1}$.
Da $\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$, folgt $\delta \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$,

also $\beta = \delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta) = \beta$.
Widerspruch.

Lemma 5.5
Sei $\alpha = \psi_m\beta$ *mit* $\beta \in C_m(\beta)$ $\beta = \Omega_{m+1} \cdot \gamma + \delta$ $\delta < \Omega_{m+1}$.
(a) Sei $m > 0$ *oder* $\gamma > 0$.
$\Rightarrow \alpha = \omega^{\psi_m(\Omega_{m+1}\cdot\gamma)+\delta}$, *wobei* $\delta < \psi_m(\Omega_{m+1}\cdot(\gamma+1))$, $\Omega_{m+1}\cdot\gamma \in C_m(\Omega_{m+1}\cdot\gamma)$.
(b) Ist $m = 0$, $\gamma = 0$, *so ist* $\alpha = \omega^\beta$.

Beweis:
$\beta \in C_m(\beta) \overset{2.4(g)}{\Rightarrow} \delta \in C_m(\beta)$.
$\overset{\delta<\Omega_{m+1}}{\Rightarrow} \delta < \psi_m\beta < \psi_m(\Omega_{m+1} \cdot (\gamma+1))$.
Weiter folgt aus $\beta =_{NF} \Omega_{m+1} \cdot \gamma + \delta$ und $\beta \in C_m\beta$ mit Lemma 2.17
$\Omega_{m+1} \cdot \gamma \in C_m(\Omega_{m+1} \cdot \gamma)$.
Aus Lemma 5.3 und obigem folgt die Behauptung.

Folgerung 5.6
$\omega^\gamma \in C_s(\delta) \Rightarrow \gamma \in C_s(\delta)$.

Beweis:
Falls $\omega^\gamma < \Omega_s$, folgt $\gamma < \Omega_s$ also $\gamma \in C_s(\delta)$.
Ansonsten folgt wegen $\omega^\gamma \in P$ $\exists m \geq s \exists \xi \in \delta \cap C_s(\delta)(\xi \in C_m(\xi) \wedge \omega^\gamma = \psi_m\xi)$.
Sei $\xi = \Omega_{m+1} \cdot \xi_1 + \xi_2$ mit $\xi_2 < \Omega_{m+1}$.
Falls $m = 0$ und $\xi_1 = 0$, folgt $\gamma = \xi_2 = \xi \in C_s(\delta)$.
Ansonsten folgt nach Lemma 5.5 $\omega^\gamma = \omega^{\psi_m(\Omega_{m+1}\cdot\xi_1)+\xi_2}$ wobei $\xi_2 < \psi_m(\Omega_{m+1}(\xi_1+1))$ und $\Omega_{m+1} \cdot \xi_1 \in C_m(\Omega_{m+1} \cdot \xi_1)$.
Also folgt $\gamma = \psi_m(\Omega_{m+1} \cdot \xi_1) + \xi_2$.
Aus $\xi \in C_s(\delta) \cap C_m(\xi)$ und $\xi =_{NF} \Omega_{m+1} \cdot \xi_1 + \xi_2$ folgt $\Omega_{m+1} \cdot \xi_1, \xi_2 \in C_s(\delta)$,
$\Omega_{m+1}\cdot\xi_1 \leq \Omega_{m+1}\cdot\xi_1 + \xi_2 < \delta$, und mit Lemma 2.17 $\Omega_{m+1}\cdot\xi_1 \in C_m(\Omega_{m+1}\cdot\xi_1)$.
Also folgt auch $\psi_m(\Omega_{m+1} \cdot \xi_1) \in C_s(\delta)$, und damit
$\gamma = \psi_m(\Omega_{m+1} \cdot \xi_1) + \xi_2 \in C_s(\delta)$.

Kapitel 6

Berechnung von $\phi_\alpha\beta$ für $\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$

In diesem Kapitel untersuche ich, wie sich $\phi_\alpha\beta$ für $\alpha, \beta \in \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ verhält. Dabei sei $\phi_\alpha(\cdot)$ wie üblich die Aufzählungsfunktion aller α-kritischen Ordinalzahlen. Diese Funktionen werden für die Schnittelimination wesentlich sein.

Lemma 6.1
Sei $0 < \alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
$\Rightarrow \exists \rho, \nu\ \ (\alpha = \psi_0(\Omega_1^{\Omega_1} \cdot \rho) + \nu)$
mit $\ \ {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$ *und* $\nu < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))$,
und es gilt dann ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$.

Beweis:
1) Aus Lemma 5.2 folgt die Darstellung $\alpha = \psi_0(\Omega_1^{\Omega_1} \cdot \rho) + \nu$
mit ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$ und $\nu < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))$
2) Da ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \subset C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$,
genügt es ${\Omega_1}^\alpha \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$ zu zeigen.
Der Fall $\alpha = 1$ ist trivial ($\rho = 0$).
Sei also $\alpha > 1$ und $\alpha = 1 + \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$. mit $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} {\Omega_1}^\alpha &= \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha} \\ &= \omega^{\Omega_1 + \omega^{\Omega_1+\alpha_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1+\alpha_k}} \\ &= \omega^{\Omega_1 + \psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k} \end{aligned}$$

$= \psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k)$.
[Beachte $\alpha_i, \omega^{\Omega_1+\alpha_i} < \epsilon_{\Omega_1+1}$ und Lemma 2.10(b).]
$\alpha_i \leq \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho+1))$.
$\Rightarrow \alpha_i < \psi_0(({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\Omega_1})[\alpha_i])$ [nach Lemma 5.1]
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + (\psi_1\psi_1\psi_1 0[\alpha_i]))$ $[{\Omega_1}^{\Omega_1} = \omega^{\Omega_1+\omega^{\Omega_1+\Omega_1}} \overset{2.10(b)}{=} \psi_1\psi_1\psi_1 0]$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \psi_1\psi_1\alpha_i)$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \omega^{(\Omega_1+\omega^{(\Omega_1+\alpha_i)})})$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{(1+\omega^{\alpha_i})})$
$\leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha})$.
$\Rightarrow \alpha_i \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha})$.
Da $\alpha_i < {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}$, und $\alpha_i \in C_1(\alpha_i)$,
folgt $\psi_1\alpha_i \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha})$.
Da $\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k =$
$= \Omega_1 \cdot (\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k})$
$\leq \Omega_1 \cdot \alpha < {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}$,
und $\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k \in C_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k)$, [da $< \epsilon_{\Omega_1+1}$]
folgt $\psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k) \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha})$,
also ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha} \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha})$.

Lemma 6.2
Sei $\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) + \nu > 0$
mit $\nu < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho+1))$ *und* ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.
(a) Ist $\beta < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$ *so gilt:*
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta)$.
(b) Gilt $\beta \geq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$ *dann gibt es* β_1, β_2*, so daß gilt:*
$\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1) + \beta_2$,
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)$,
und $\beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot (\beta_1+1))$,
und es folgt dann:
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.

Beweis: 1)Die Darstellung von β in (b) folgt aus Lemma 5.2.

2)Wir setzen im Fall (a) $\beta_1 := 0$ und $\beta_2 := \beta$.
Zeige: ($\beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot (\beta_1+1))$ und
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)$)
$\Rightarrow {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.

Wegen ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)$ genügt es
${\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$ zu zeigen.
Sei o.E. $\beta_2 > 0$, $\beta_2 = \omega^{\delta_1} + \cdots + \omega^{\delta_k}$ mit $\delta_1 \geq \cdots \geq \delta_k$.
${\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 = \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha + \delta_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha + \delta_k}$
$= \psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_1) + \cdots + \psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_k)$, wobei $\alpha = 1 + \gamma$.
Da $\psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma) = {\Omega_1}^{\alpha} \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}) \subset C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$,
[nach Lemma 6.1]
und $\Omega_1 \cdot \gamma \in C_1(\Omega_1 \cdot \gamma)$,
ist $\Omega_1 \cdot \gamma \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.
$\delta_i \leq \beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha+1})$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \omega^{\Omega_1 + \Omega_1 \cdot \gamma + \Omega_1})$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \Omega_1))$.
$\Rightarrow \delta_i < \psi_0(({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \Omega_1))[\delta_i])$ [Lemma 5.1]
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i))$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \omega^{\Omega_1 + \Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i})$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \omega^{\delta_i})$
$\leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.
$\Rightarrow \delta_i \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.
Da weiter $\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i < {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2$,
[falls $\alpha > 1$ folgt dies aus $\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i < {\Omega_1}^2 \leq {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2$
falls $\alpha = 1$ folgt $\gamma = 0$, $\delta_i < \Omega_1 \leq \Omega_1 \cdot \beta_2$]
und $\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i \in C_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i)$, [da $< \epsilon_{\Omega_1+1}$]
folgt $\psi_1(\Omega_1 \cdot \gamma + \delta_i) \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$,
also ${\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.

Definition 6.3
Definition von $\widetilde{\phi}_\alpha\beta$ für $\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$:
Sei $1 + \alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) + \nu$,
mit $\nu < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))$ und ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$. [gemäß Lemma 6.1]
Ist $\beta < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$, so sei,
falls $\nu = 0$, $\beta_1 := 0$ $\beta_2 := \beta$,
falls $\nu \neq 0$, $\beta_1 := 0$ $\beta_2 := 1 + \beta$.
Ansonsten sei $\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1) + \beta_2$ mit $\beta_1 \neq 0$,
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)$
und $\beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot (\beta_1 + 1))$.
In allen Fällen sei $\widetilde{\phi}_\alpha\beta := \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$.

Lemma 6.4
(a) $\widetilde{\phi}_0\beta = \omega^\beta$.
(b) $\beta_0 < \beta \Rightarrow \widetilde{\phi}_\alpha\beta_0 < \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.
(c) $\alpha \leq \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.
(d) $\beta \leq \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.

$$\beta = \widetilde{\phi}_\alpha\beta \Leftrightarrow \exists\eta > 0 \;\; (\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta) \text{ mit } {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta \in C_0({\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta),$$
$$\text{und } {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}$$
$$(\text{falls } \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \leq 1 + \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))).$$

Beweis:
(a) folgt aus Satz 5.3.
(b) Lemmata 2.6 und 6.2.
(c) Falls $\nu = 0$, folgt $\alpha \leq 1 + \alpha = \widetilde{\phi}_\alpha 0 \leq \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.
Falls $\nu \neq 0$, folgt nach Lemma 6.2(a) ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$
$\Rightarrow \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha} = {\Omega_1}^\alpha \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$
$\overset{5.6}{\Rightarrow} \Omega_1{\cdot}\alpha \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$.
Sei $\alpha =_{NF} \omega^{\alpha_1} + \alpha_2$. $\Rightarrow \omega^{\Omega_1 + \alpha_1} = \Omega_1{\cdot}\omega^{\alpha_1} \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$
$\overset{5.6}{\Rightarrow} \Omega_1 + \alpha_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$
$\Rightarrow \alpha_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$
$\Rightarrow \alpha_1 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha)$ ist Epsionzahl
$\Rightarrow \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha) = \widetilde{\phi}_\alpha 0 \leq \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.
(d) Der Fall $\alpha = 0$ ist klar nach (a), der Fall $\beta = 0$ trivial.
Seien deshalb $\alpha, \beta > 0$.
Ist $\beta < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$ so ist
$\beta \neq \psi_0({\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta)$ mit ${\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}$ und
${\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta \in C_0({\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta)$.
Ist $\beta =_{NF} \omega^{\beta_1} + \beta_2$,
so folgt nach Lemma 6.2(a) ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta)$,
also ${\Omega_1}^\alpha \cdot \beta =_{NF} \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha + \beta_1} + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta)$.
$\overset{5.6}{\Rightarrow} \Omega_1 \cdot \alpha + \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta)$.
$\Rightarrow \beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta)$.
Da $\beta_1 < \Omega_1$, folgt $\beta_1 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta) \leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}\rho + {\Omega_1}^\alpha{\cdot}(1 + \beta))$.
Da $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^\alpha \cdot \beta)$ und $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}\rho + {\Omega_1}^\alpha{\cdot}(1 + \beta)$ Epsilonzahlen, folgt
$\beta < \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.

Sei nun $\beta \geq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$, $\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1) + \beta_2$
gemäß Lemma 6.2(b).

Ist $\beta_2 = 0$, so ist $\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta)$
mit ${\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}$ und ${\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta \in C_0({\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\eta)$
und $\widetilde{\phi}_\alpha\beta = \beta$.
Ist $\beta {=_{NF}} \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1) + \beta_2$ mit $\beta_2 \neq 0$,
so ist $\beta < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + 1)$
$\leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$
$= \widetilde{\phi}_\alpha\beta$
und $\beta \neq \psi_0({\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta)$.
Ansonsten ist $\beta = \beta_2$.
Sei $\beta {=_{NF}} \omega^{\beta_3} + \beta_4$.
Aus ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$
folgt wie im Fall $\beta < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$ dann
$\beta_3 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$
$= \widetilde{\phi}_\alpha\beta$ ist Epsilonzahl, also $\quad \beta < \widetilde{\phi}_\alpha\beta$
und $\beta \neq \psi_0({\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \eta)$.

Lemma 6.5
(a) $\alpha > \alpha_0 \Rightarrow \widetilde{\phi}_{\alpha_0}(\widetilde{\phi}_\alpha\beta) = \widetilde{\phi}_\alpha\beta$.
(b) $(\forall \xi < \alpha \ (\widetilde{\phi}_\xi\beta = \beta) \wedge \alpha \geq 1) \Rightarrow \exists \gamma \ (\widetilde{\phi}_\alpha\gamma = \beta)$.

Beweis:
(a) $\widetilde{\phi}_\alpha\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\alpha_0+1} \cdot \eta)$,
mit ${\Omega_1}^{\alpha_0+1}{\cdot}\eta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \geq {\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}\rho_0 + {\Omega_1}^{\alpha_0+1}$ und ${\Omega_1}^{\alpha_0+1}{\cdot}\eta \in C_0({\Omega_1}^{\alpha_0+1}{\cdot}\eta)$,
falls $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho_0) \leq \alpha_0 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho_0 + 1))$,
und $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \leq \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))$.
Mit Lemma 6.4(d) folgt die Behauptung.
(b) Sei $\forall \xi < \alpha \ (\widetilde{\phi}_\xi\beta = \beta)$.
Dann folgt $\beta = \widetilde{\phi}_0\beta = \omega^\beta$.
$\Rightarrow \exists \delta (\beta = \psi_0\delta \wedge \delta \in C_0(\delta))$.
Sei $\delta = {\Omega_1}^{\rho_1} \cdot \delta_1 + \cdots + {\Omega_1}^{\rho_k} \cdot \delta_k$ die Cantornormalform zur Basis Ω_1.
Aus $\forall \xi < \alpha (\widetilde{\phi}_\xi\beta = \beta)$ folgt nach Lemma 6.4(d)
$\forall \xi < \alpha \ (\rho_i \geq \xi + 1)$,
also folgt $\exists \eta \ (\delta = {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \eta)$.
Weiter folgt aus Lemma 6.4(c) $\forall \xi < \alpha ({\Omega_1}^{\alpha} \cdot \eta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho_\xi + {\Omega_1}^{\xi+1})$,
falls $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho_\xi) \leq \xi < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho_\xi + 1))$.
Beh.: $\delta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho$, falls $\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho), \rho \neq 0, {\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}\rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}\rho)$,

und $\delta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}$, falls $\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) + \nu$
mit $\nu \neq 0$ oder $\rho \neq 0$, ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.

Beweis: Falls $\alpha_0 := \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) < \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot (\rho + 1))$,
folgt $\delta > {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha_0+1}$,
also, da $\delta = {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \eta$,
$\delta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}$.
Falls $\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) > 1$, folgt aus
$\forall \xi < \alpha \ (\xi \leq \widetilde{\phi}_\xi \beta = \beta)$ und $\alpha \in Lim$
$\beta \geq \alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$, also $\delta \geq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho$.
Falls $\alpha = 1$, folgt aus $\beta = \omega^\beta \quad \delta \geq \Omega_1 = {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha}$.

Damit können wir schreiben:
$\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$,
mit $\delta := {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \in C_0(\delta)$,
und ${\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 \geq {\Omega_1}^{\alpha}$, falls $\rho = 0$ oder $\alpha > \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.
Betrachte zunächst den Fall $\beta_1 = 0$:
Sei $\beta_2 = 1 + \gamma$, falls $\rho = 0$ oder $\alpha > \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$, $\beta_2 = \gamma$ ansonsten.
Beh. $\gamma < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$.
Bew. o.E. sei $\beta_2 > 0 \quad \beta_2 =_{NF} \omega^{\beta_3} + \beta_4$.
Aus $\delta \in C_0(\delta)$ folgt ${\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2 =_{NF} {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \omega^{\beta_3} + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_4 \in C_0(\delta)$,
also $\omega^{\Omega_1 \cdot \alpha + \beta_3} = {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \omega^{\beta_3} \in C_0(\delta)$.
$\overset{5.6}{\Rightarrow} \beta_3 < \psi_0(\delta)$ ist Epsilonzahl.
$\Rightarrow \gamma \leq \beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2) \leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1})$,
also die Zwischenbehauptung.
Es folgt $\widetilde{\phi}_\alpha \gamma = \beta$.

Im Fall $\beta_1 \neq 0$ folgt wie eben (mit γ statt β_2)
$\beta_2 < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_2)$
$\leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot (\beta_1 + 1))$.
Es folgt $\widetilde{\phi}_\alpha(\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1) + \beta_2) = \beta$.

Satz 6.6
Sei ϕ_α die Aufzählungsfunktion aller α-kritischen Ordinalzahlen.
Seien $\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$. Dann gilt:
$\widetilde{\phi}_\alpha \beta = \phi_\alpha \beta$.

Beweis: Lemma 6.4 (a), (b) und Lemma 6.5.

Kapitel 7

Fundamentalfolgen für ω^β und $\phi_\alpha\beta$

In diesem Kapitel wird untersucht, wie die in Kapitel 4 definierten Fundamentalfolgen für ω^α und $\phi_\alpha\beta$ lauten. Es wird sich herausstellen, daß hierbei relativ viele Fallunterscheidungen auftreten.

Lemma 7.1
Die Fundamentalfolgen für ω^β:
Sei $\Omega_s \leq \beta \in C_s(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap \Omega_{s+1}$.
(a) Ist β *Nachfolgerzahl,* $\beta = \gamma+1$ *so ist* $dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$, $\omega^\beta[n] = \omega^\gamma \cdot (n+1)$.
(b) Sei $\beta \in Lim$:
  Generell gilt $dom(\omega^\beta) = dom(\beta)$.
    (i) Falls $\beta = \omega^{\gamma+1}$ *für eine Epsilonzahl* γ, *d.h.*
      $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1}+1)$, *folgt*
      $dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$, $\omega^\beta[n] = \omega^{\beta[n+1]}$.
    (ii) Falls $\beta = \omega^{\epsilon+\Omega_m}$ *für eine Epsilonzahl* $\epsilon \geq \Omega_m > 1$, *d.h.*
      $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha + \Omega_m)$ *für ein* $1 \leq m \leq s$, *folgt*
      $\omega^\beta[0] = \omega^{\beta[0]\cdot 2}$, $\omega^\beta[x] = \omega^{\beta[x]}$ *für* $0 \neq x \in dom(\beta) = T_{m-1}$.
    (iii) Falls $\beta = \Omega_{s+1}$, *gilt* $dom(\omega^\beta) = \mathrm{T}_s$, $\omega^\beta[x] = \beta[x] = x$.
    (iv) Falls $\beta = \epsilon_{\nu+1}$ *mit* $\Omega_s \leq \beta < \Omega_{s+1}$,
      d.h. $\exists\alpha(\beta = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}(\alpha+1)))$, *folgt*
      $dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$,
      $\omega^\beta[0] = \beta[0] = \omega^{\epsilon_\nu+\Omega_s} = \omega^{\psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha)+\Omega_s}$,

$\omega^\beta[n+1] = \omega^{(\omega^\beta[n])}$,
also $\omega^{\beta[n]} = \omega^\beta[n+1]$.
(v) In allen anderen Fällen ist $\omega^\beta[x] = \omega^{\beta[x]}$.

Beweis:
Fall 1 $0 < \beta < \omega$:
$\beta = \gamma + 1$, $dom(\beta) = \mathbb{N}$, $\omega^\beta[n] = \psi_0(\gamma) \cdot (n+1) = \omega^\gamma \cdot (n+1)$.
Fall 2 $\omega < \beta$ Nachfolgerzahl:
Sei $\beta = \gamma + 1$, $\gamma = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta'$
mit $\delta' < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha + 1))$ und $\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$.
Es gilt dann $\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta' + 1)$,
also $dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$, $\omega^\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta') \cdot (n+1) = \omega^\gamma \cdot (n+1)$.
Fall 3 $\beta \in Lim$, β keine Epsilonzahl:
Es gilt dann $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \delta$
mit $0 < \delta < \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot (\alpha + 1))$, $\Omega_{s+1} \cdot \alpha \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$,
$dom(\beta) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{T}_u \mid u < s\}$.
Fall 3.1. $\delta \notin P$ oder $\delta \leq \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$ oder $\delta = \omega$:
$\Rightarrow dom(\beta) = dom(\delta)$, $1 + \beta[x] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + (\delta[x])$.
$\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \delta)$.
$dom(\omega^\beta) = dom(\beta)$, $\omega^\beta[x] = \omega^{\beta[x]}$.
Fall 3.2. $\psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) < \delta \in P$, $\delta \neq \omega$:
$\Rightarrow \beta = \delta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho)$ mit $1 \leq \rho < \Omega_{s+1}$,
$\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho \in C_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho)$, und es gilt
$\omega^\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho))$.
Fall 3.2.1. $\rho = 1$:
Dies ist nach Lemmata 5.4 und 5.5 genau dann der Fall,
wenn $\beta = \omega^{\gamma+1}$ für eine Epsilonzahl γ.
$\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \cdot (n+1)$, $\omega^{\beta[n]} = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \cdot n)$.
$dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$,
$\omega^\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) \cdot (n+1)) = \omega^{\beta[n+1]}$.
Fall 3.2.2. $1 < \rho = \rho' + 1$:
$\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho') \cdot (n+1)$.
$dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$, $\omega^\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho') \cdot (n+1)) = \omega^{\beta[n]}$.
Fall 3.2.3. $\rho \in Lim$:
Falls $dom(\rho) \in \{\mathbb{N}\} \cup \{\mathrm{T}_u \mid u < s\}$, $\rho \neq \Omega_m$ für ein $m \leq s$, gilt

$$\begin{aligned} \beta[x] &= \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho[x]) \\ &= \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho[x]), \qquad [\text{da } \rho[x] \neq 0] \end{aligned}$$

also $dom(\omega^\beta) = dom(\beta)$,
und $\omega^\beta[x] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho[x])) = \omega^{\beta[x]}$.
Falls $\rho = \Omega_m$ für ein $1 \leq m \leq s$,
(dies ist nach Lemmata 5.4 und 5.5 genau dann der Fall, wenn $\beta = \omega^{\epsilon+\Omega_m}$ für eine Epsilonzahl $\Omega_m < \epsilon$),
folgt $dom(\omega^\beta) = dom(\beta) = T_{m-1}$,
$\beta[0] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha)$,
$\omega^\beta[0] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha + \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha)) = \omega^{\beta[0]\cdot 2}$,
und für $x \neq 0$ wie eben $\omega^\beta[x] = \omega^{\beta[x]}$.
Falls $dom(\rho) \in \{\mathrm{T}_u \mid u \geq s\}$, gilt
$\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho[\zeta_n]) = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha) + \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho[\zeta_n])$,
$\omega^\beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + (\psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \rho)[n]))$
$= \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha + \beta[n])$
$= \omega^{\beta[n]}$.

Fall 4 β Epsilonzahl:
Insbesondere folgt $\beta = \omega^\beta$, $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1} \cdot \alpha)$.
Fall 4.1. $\alpha = 0$ d.h. $\beta = \psi_s(0) > \omega$, $s > 0$:
$dom(\omega^\beta) = dom(\beta) = \mathrm{T}_{s-1}$, $\omega^\beta[x] = x$.
Ansonsten sei $0 \neq \Omega_{s+1} \cdot \alpha =_{NF} \psi_{m_1}\alpha_1 + \cdots + \psi_{m_k}\alpha_k$ $(m_i \geq s+1)$.
Fall 4.2. $\alpha_k = 0$, $m_k = s+1$, d.h. $\alpha = \alpha' + 1$
(Dies ist der Fall $\beta = \epsilon_{\nu+1}$).
$\beta = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \Omega_{s+1})$.
$\omega^\beta[n] = \beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_n) = \zeta_{n+1}$,
wobei $\zeta_0 = \psi_s 0$, $\zeta_{n+1} = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_n)$,
$\omega^\beta[0] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \psi_s 0) = \omega^{\psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha')+\Omega_s}$,
$\omega^\beta[n+1] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_{n+1})$
$= \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_n))$
$= \omega^{\psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\alpha'+\zeta_n)}$
$= \omega^{(\omega^\beta[n])}$.
Fall 4.3. $\alpha_k = 0$, $m_k > s+1$,
d.h. $\beta = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \psi_{m_k}0)$:
$\omega^\beta[n] = \beta[n] = \psi_s(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_n)$,
wobei $\zeta_0 = \psi_{m_k-1}0$, $\zeta_{n+1} = \psi_{m_k-1}(\Omega_{s+1}{\cdot}\alpha' + \zeta_n)$,
$\omega^\beta[n] = \beta[n] = \omega^{\beta[n]}$ für alle n.
Fall 4.4. $\alpha_k = \gamma + 1$:
$dom(\omega^\beta) = \mathbb{N}$,

$\omega^\beta[n] = \psi_s(\psi_{m_1}\alpha_1 + \cdots + \psi_{m_{k-1}}\alpha_{k-1} + (\psi_{m_k}\gamma)\cdot(n+1))$
$= \omega^{\beta[n]}$.

Fall 4.5. $\alpha_k \in Lim$:
$(\psi_{m_k}\alpha_k)[x] = \psi_{m_k}(\alpha_k[x])$
oder $= \psi_{m_k}(\alpha_k[\zeta_x])$,
also in jedem Fall $(\Omega_{s+1}\cdot\alpha)[x] = \Omega_{s+1}\cdot\rho_x$ für ein ρ_x.
$\omega^\beta[n] = \beta[n] = \psi_s((\Omega_{s+1}\cdot\alpha)[\zeta'_n])$
$= \psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\rho_{\zeta'_n}) = \omega^{\beta[n]}$,
oder $\omega^\beta[x] = \beta[x] = \psi_s((\Omega_{s+1}\cdot\alpha)[x])$
$= \psi_s(\Omega_{s+1}\cdot\rho_x) = \omega^{\beta[x]}$.

Definition 7.2
Definion von $\alpha[n]_H$ für $\alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, $n \in dom(\alpha)$:
Falls $\alpha = 0, \gamma+1$, ist $\alpha[n]_H := \alpha[n]$.
Ansonsten sei $\alpha =_{NF} \alpha_1 + \omega^{\alpha_2}$.
Falls α_2 Nachfolgerzahl, $\alpha[n]_H := \alpha[n] = \alpha_1 + \omega^{\alpha_2[0]}\cdot(n+1)$.
Falls $dom(\alpha_2) = \mathbb{N}$, $\alpha[n]_H := \alpha_1 + \omega^{\alpha_2[n]}$.

Es folgt
$\forall\alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})\exists s \in \{-1,\ 0,\ 1\}\forall n \neq 0(\alpha[n]_H = \alpha[n+s] \wedge \alpha[n] = \alpha[n-s]_H)$.

Lemma 7.3
Was ist $dom(\phi_\alpha\beta)$ und $(\phi_\alpha\beta)[n]$ für $\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$?
Sei $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho) \leq \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot(\rho+1))$, $\Gamma := \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho)$.

β	α	$\phi_\alpha\beta[n] =$
$\beta = 0$	$\alpha = 0$	0
	$\alpha = 1$	$\phi_0^{n+1}1$
	$1 < \alpha = \delta + 1$	$\phi_\delta^{n+1}\omega$
	$\alpha = \omega$	$\phi_{n+2}0$
	$\omega^2 < \alpha = \omega^{\Gamma+1}, \omega^{\omega^{\Gamma+1}}$	$\phi_{\alpha[0]_H}(1)$, *falls* $n = 0$

		$\phi_{\alpha[n]_H}(0)$, *falls* $n > 0$
	$1 < \alpha = \Gamma$	$\alpha[n]$
	$\omega, \Gamma, \omega^{\Gamma+1}, \omega^{\omega^{\Gamma+1}} \neq \alpha \in Lim$	$\phi_{\alpha[n]_H}(0)$
$\beta = \widetilde{\beta} + 1$	$\alpha = 0$	$(\phi_0\widetilde{\beta})\cdot(n+1)$
	$\alpha = 1$	$\phi_0^{n+1}((\phi_1\widetilde{\beta}) + 1)$
	$1 < \alpha = \delta + 1$	$\phi_\delta^{n+1}((\phi_\alpha\widetilde{\beta}) + \omega)$
	$\alpha = \omega$	$\phi_{n+2}((\phi_\omega\widetilde{\beta}) + 1)$
	$\omega \neq \alpha \in Lim$	$\phi_{\alpha[n]_H}((\phi_\alpha\widetilde{\beta}) + 1)$
$\beta = \omega$	$\alpha \neq \Gamma$	$\phi_\alpha n$
	$\alpha = \Gamma$	$\phi_\alpha(n+1)$
$\beta = \phi_\alpha\beta$	α *beliebig*	$\beta[n]$
$\beta = \omega^{\phi_{\alpha+1}\gamma+1}$ *für ein* γ	α *beliebig*	$\phi_\alpha(\beta[n+1])$
$\omega, \phi_\alpha\beta \neq \beta \in Lim$ $\forall\gamma(\beta \neq \omega^{\phi_{\alpha+1}\gamma+1})$	$\alpha = 0$	$\phi_0(\beta[n])$
	$\alpha > 0$	$\phi_\alpha(\beta[n]_H)$

Beweis:

Seien $\rho, \nu, \beta_1, \beta_2$ wie in Definition 6.3.
Fall 1 $\quad \beta_2 = \gamma + 1$:
Dann gilt $\beta = \widetilde{\beta} + 1$ oder $(\nu \neq 0 \wedge \beta = 0)$.
Weiter gilt $\phi_\alpha\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} {\cdot} \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} {\cdot} \gamma + {\Omega_1}^{\alpha})$.
Sei $(\phi_\alpha\beta)^o :=$

$$\begin{cases} \phi_\alpha\widetilde{\beta} = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} {\cdot} \gamma), & \text{falls } \beta = \widetilde{\beta} + 1, \\ 0, & \text{falls } \beta = 0. \end{cases}$$

Fall 1.1. $\quad \alpha = 0$:
$\phi_\alpha\beta = \psi_0(\Omega_1 \cdot \beta_1 + \gamma + 1)$.
$\phi_\alpha\beta[n] = \psi_0(\Omega_1 {\cdot} \beta_1 + \gamma) \cdot (n+1) = (\phi_\alpha\widetilde{\beta}) {\cdot} (n+1)$.
Fall 1.2. $\quad \alpha = 1$:
$\phi_\alpha\beta = \psi_0({\Omega_1}^2 \cdot \beta_1 + \Omega_1 \cdot \gamma + \Omega_1)$.
$\zeta_0 = 1,\ \zeta_{n+1} = \psi_0({\Omega_1}^2 \cdot \beta_1 + \Omega_1 \cdot \gamma + \zeta_n) = \omega^{(\phi_\alpha\beta)^o + \zeta_n}$.
$\phi_\alpha\beta[0] = \omega^{(\phi_\alpha\beta)^o + 1}$.
$\phi_\alpha\beta[n+1] = \omega^{(\phi_\alpha\beta)^o + (\phi_\alpha\beta)[n]} = \omega^{\phi_\alpha\beta[n]}$.
Sei nun $1 < \alpha = 1 + \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ mit $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_k$,
$\delta := 1 + \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}}$.
${\Omega_1}^{\alpha} = \omega^{\Omega_1 \cdot \alpha} \quad = \omega^{\Omega_1 + \omega^{\Omega_1 + \alpha_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1 + \alpha_k}}$
$= \psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_k)$. (da $\alpha_i, \psi_1\alpha_i < \epsilon_{\Omega_1+1}$)
Fall 1.3. $\quad \alpha_k = 0$ d.h. $1 < \alpha = \delta + 1$:
${\Omega_1}^{\alpha}[x] = \psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_{k-1} + x)$
$= \omega^{\Omega_1 + \omega^{\Omega_1 + \alpha_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1 + \alpha_{k-1}} + x}$
$= {\Omega_1}^{\delta} \cdot \omega^x$.
$\zeta_0 = 1$,
$\zeta_{n+1} = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \gamma + {\Omega_1}^{\alpha}[\zeta_n])$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \gamma + {\Omega_1}^{\delta} \cdot \omega^{\zeta_n})$
$= \phi_\delta((\phi_\alpha\beta)^o + \omega^{\zeta_n})$.
$(\phi_\alpha\beta)[n] = \zeta_{n+1}$.
$(\phi_\alpha\beta)[0] = \phi_\delta((\phi_\alpha\beta)^o + \omega)$,
$(\phi_\alpha\beta)[n+1] = \phi_\delta((\phi_\alpha\beta)^o + \omega^{\phi_\alpha\beta[n]})$
$= \phi_\delta(\phi_\alpha\beta[n])$. [da $\phi_\alpha\beta[n]$Epsilonzahl $> (\phi_\alpha\beta)^o$]
Fall 1.4. $\quad \alpha_k = \mu + 1$:
${\Omega_1}^{\alpha}[n] = \psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_{k-1} + (\psi_1\mu) \cdot (n+1))$
$= \omega^{\Omega_1 + \omega^{\Omega_1 + \alpha_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1 + \alpha_{k-1}} + \omega^{\Omega_1 + \mu} \cdot (n+1)}$
$= {\Omega_1}^{\delta + \omega^{\mu} \cdot (n+1)}$.
Falls $\alpha \neq \omega$, folgt $\delta + \omega^{\mu} {\cdot} (n+1) = \alpha[n]_H$.

Falls $\alpha = \omega$, folgt $\delta + \omega^\mu{\cdot}(n+1) = n+2$.
$\phi_\alpha\beta[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \gamma + {\Omega_1}^{\alpha}[n])$
$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \gamma + {\Omega_1}^{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)})$.
Es folgt $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \le \delta + \omega^\mu \le \delta + \omega^\mu{\cdot}(n+1) < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}(\rho+1))$
(denn $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$ ist Epsilonzahl oder $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) = 1$, und
$\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \le \alpha < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}(\rho+1))$.
Falls $\delta + \omega^\mu > \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$, folgt,
falls $\beta \ne 0$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)}((\phi_\alpha\beta)^o + 1)$,
falls $\beta = 0$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)}(0)$.
Falls $\delta + \omega^\mu = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$, folgt $\delta = 1$, $\mu = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$, $\rho > 0$, also
$\omega^2 < \alpha = \omega^{\Gamma+1}$.
Falls $\beta \ne 0$, folgt $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)}((\phi_\alpha\beta)^o + 1)$.
Falls $\beta = 0$, folgt $(\phi_\alpha\beta)[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)})$
$= \phi_{\delta+\omega^\mu}(1)$, falls $n = 0$,
$= \phi_{\delta+\omega^\mu\cdot(n+1)}(0)$, falls $n > 0$.

Fall 1.5. $\alpha_k \in \mathit{Lim}$:
${\Omega_1}^{\alpha}[n] = \psi_1(\psi_1\alpha_1 + \cdots + \psi_1\alpha_{k-1} + \psi_1(\alpha_k[n]))$
$= \omega^{\Omega_1 + \omega^{\Omega_1+\alpha_1} + \cdots + \omega^{\Omega_1+\alpha_{k-1}} + \omega^{\Omega_1+\alpha_k[n]}}$
$= {\Omega_1}^{\delta+\omega^{\alpha_k[n]}}$.
$\phi_\alpha\beta[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha}{\cdot}\gamma + {\Omega_1}^{\delta+\omega^{\alpha_k[n]}})$.
Da $\alpha_k[n] \ge 1$, folgt $\delta + \omega^{\alpha_k[n]} = 1 + \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\alpha_k[n]}$
$= \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\alpha_k[n]}$
$= \alpha[n]_H$, da $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$.

Fall 1.5.1. $\alpha > \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.
$\Rightarrow \alpha[n]_H \ge \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.
Falls $\beta \ne 0$, folgt $\phi_\alpha\beta[n] = \phi_{\alpha[n]_H}((\phi_\alpha\beta)^o + 1)$.
Sei also $\beta = 0$.

Fall 1.5.1.1. $\alpha[n]_H = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.
Wegen $\forall m > 0 (\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \le \alpha[0]_H < \alpha[m]_H)$ folgt $n = 0$.
Weiter folgt aus $\delta + \omega^{\alpha_k[0]} = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$
$\delta + \omega^{\alpha_k[0]} = \alpha_k[0] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$ und $k = 1$.
Da $\alpha_k \in \mathit{Lim}$, folgt $\alpha_k \in P$,
und, da $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho) \le \alpha_k < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}{\cdot}(\rho+1))$,
$\alpha_k = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \lambda)$ mit $\lambda < {\Omega_1}^{\Omega_1}$, ${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \lambda \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \lambda)$.
Wäre $\lambda \in \mathit{Lim}$, so wäre $\alpha_k[0] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + \lambda[j])$ für ein $j \in \{0, 1\}$,
also $0 < \lambda[0] \le \lambda[j]$.

Also ist λ Nachfolgerzahl, und es folgt $\lambda = 1$.

Also folgt im Fall 1.5.1.1. generell $n = 0$, $\alpha = \omega^{\omega^{\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho)+1}}$, $\rho \neq 0$, und es folgt $\phi_\alpha 0[0] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho)}) = \phi_{\alpha[0]_H}(1)$.

Fall 1.5.1.2. $\alpha[n]_H > \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.

Dann gilt $(\phi_\alpha 0)[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha[n]_H}) = \phi_{\alpha[n]_H}(0)$.

Fall 1.5.2. $\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho)$.

Dann gilt zunächst $\beta = \widetilde{\beta} + 1$.

Sei $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_n) \leq \alpha[n]_H < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot(\rho_n + 1))$.

Dann folgt $\rho_n < \rho$, also

${\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_n + {\Omega_1}^{\alpha[n]_H+1} \leq {\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}\cdot\beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha}\cdot\gamma + {\Omega_1}^{\alpha[n]_H}$,

also $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_{\alpha[n]_H}((\phi_\alpha\beta)^o + 1)$.

Fall 2 $\beta_2 \in Lim$:

Sei $(\phi_\alpha\beta)^o := \begin{cases} \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1), & \text{falls } \beta_1 \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \beta_1 = 0. \end{cases}$

Sei $\beta_2 =_{NF} \beta_3 + \omega^{\beta_4}$. [auch $\beta_3 = 0$ möglich]

$\phi_\alpha\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \omega^{\beta_4})$

$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + \omega^{\Omega_1\cdot\alpha+\beta_4})$.

Fall 2.1. $\alpha = 0$:

$\phi_\alpha\beta[n] = \psi_0(\Omega_1 \cdot \beta_1 + \beta_3 + \omega^{\beta_4}[n])$

$= \omega^{(\phi_\alpha\beta)^o+\beta_3+\omega^{\beta_4}[n]}$.

Fall 2.2. $\alpha > 0$:

Sei $\alpha = 1 + \delta$.

$\phi_\alpha\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + \psi_1(\Omega_1 \cdot \delta + \beta_4))$.

Fall 2.2.1. $\beta_4 = \beta_5 + 1$:

$(\phi_\alpha\beta)[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + \psi_1(\Omega_1 \cdot \delta + \beta_5) \cdot (n+1))$

$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + \omega^{\Omega_1+\Omega_1\cdot\delta+\beta_5} \cdot (n+1))$

$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot (\beta_3 + \omega^{\beta_5}\cdot(n+1)))$.

Falls $\beta_1 \neq 0$, folgt $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_\alpha((\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_5}\cdot(n+1))$.

Falls $\beta_1 = 0$ und $\beta_3 + \omega^{\beta_5} \geq \omega$, d.h. $\beta > \omega$, folgt

$(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_\alpha(\beta_3 + \omega^{\beta_5}\cdot(n+1))$

$= \phi_\alpha((\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_5}\cdot(n+1))$.

Falls $\beta_1 = 0$ und $\beta_3 + \omega^{\beta_5} < \omega$, d.h. $\beta = \omega$, folgt,

falls $\nu \neq 0$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_\alpha n$,

falls $\nu = 0$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_\alpha(n+1)$.

Fall 2.2.2. $\beta_4 \in Lim$:

$(\phi_\alpha\beta)[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot \beta_3 + \psi_1(\Omega_1\cdot\delta + \beta_4[n]))$

$= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + {\Omega_1}^{\alpha} \cdot (\beta_3 + \omega^{\beta_4[n]}))$.

Da $\beta_4[n] \neq 0$, folgt $\beta_3 + \omega^{\beta_4[n]} \geq \omega$.

Es folgt $(\phi_\alpha\beta)[n] = \phi_\alpha((\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_4[n]})$.

Weiter gilt das Folgende generell im Fall 2:
Ist $\beta_2 \leq \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)$ oder $\beta_2 \notin P$ oder $\beta_1 = 0$,
so ist $(\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_4}[n] = \beta[n]$,
sowie $(\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_4}[n]_H = \beta[n]_H$.
Ansonsten ist $\beta = \beta_2 = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \lambda)$ mit
$\lambda \geq 1$ und $\beta_1 \neq 0$.
Sei $\lambda = \Omega_1{\cdot}\lambda_1 + \lambda_2$ mit $\lambda_2 < \Omega_1$.
Dann gilt $\beta = \omega^{\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \Omega_1 \cdot \lambda_1) + \lambda_2}$,
also $\beta_3 = 0$ und $\beta_4 = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1 + \Omega_1{\cdot}\lambda_1) + \lambda_2$.

Ist $\lambda > 1$ so gilt:

$\beta[n] = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \lambda[n])$
oder $= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \lambda[0]){\cdot}(n+1)$
oder $= \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1 + \lambda[\zeta_n])$,

in jedem Fall also

$\beta[n] = (\phi_\alpha\beta)^o + \beta[n] = (\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_4}[n]$.

Weiter gilt $\beta[n]_H = \omega^{\beta_4}[n]_H = \omega^{\beta_4[0]}{\cdot}(n+1)$
$= (\phi_\alpha\beta)^o + \omega^{\beta_4[0]}{\cdot}(n+1) = (\phi_\alpha\beta)^o + (\beta_3 + \omega^{\beta_4})[n]_H$,
bzw. $= \omega^{\beta_4[n]} = (\phi_\alpha\beta)^o + (\beta_3 + \omega^{\beta_4})[n]_H$.

Ist $\lambda = 1$ so ist $\beta[n] = (\phi_\alpha\beta)^o{\cdot}(n+1)$,
also $(\phi_\alpha\beta)^o + \beta_3 + \omega^{\beta_4}[n] = \beta[n+1]$.
Weiter gilt $(\phi_\alpha\beta)^o + (\beta_3 + \omega^{\beta_4})[n]_H$
$= (\phi_\alpha\beta)^o + \omega^{\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1} \cdot \beta_1)}{\cdot}(n+1)$
$= (\phi_\alpha\beta)^o{\cdot}(n+2) = \beta[n+1]$.

Es gilt $\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1 + \lambda)$ mit $\lambda = 1$ genau dann, wenn
$\beta = \omega^{\phi_{\alpha+1}\gamma + 1}$ für ein γ.
(Nämlich mit $\phi_{\alpha+1}\gamma = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1)$.
Beachte, daß nach Lemma 2.17
${\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1} \cdot \rho + {\Omega_1}^{\alpha+1}{\cdot}\beta_1)$.

Fall 3 $\quad \beta_2 = 0$:

Dann ist $\beta = 0,\ \nu = 0,\ \alpha \neq 0$ und $\phi_\alpha\beta = \alpha$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \alpha[n]$,
oder $\phi_\alpha\beta = \beta$, $(\phi_\alpha\beta)[n] = \beta[n]$,
oder $\alpha = \beta = 0$ und $(\phi_\alpha\beta)[n] = 0$.

Kapitel 8

Die Relation $<_k$ und die Funktionen F_β

In diesem Kapitel wird die Funktionen F_α der schnellwachsenden Hierarchie und die Relationen $<_k$ und $\widetilde{<}_k$ eingeführt. Hierbei wird zunächst ein allgemeiner Ordinalzahlabschnitt Ord mit Fundamentalfolgenzuordnung, der die Bachmann-Bedingung erfüllt, betrachtet. Damit sind wir zunächst unabhängig von den in Kapitel 4 eingeführten Fundamentalfolgen, die wesentlich auf dem speziellen Ordinalzahlbezeichnungssystem, das in der Literatur oft variiert wird, beruhen und auch unabhängig von den Schwierigkeiten, die in Kapitel 7 auftreten.

Vorbemerkung 8.1
Gegeben sei ein Ordinalzahlenabschnitt $Ord \subset \Omega_1$ mit Fundamentalfolgenzuordung, d.h. es existiere eine Funktion $\cdot[\cdot] : Ord \times \mathbb{N} \to Ord$ mit $(\gamma + 1) \in Ord \to (\gamma + 1)[n] = \gamma$ und $\gamma \in Lim \cap Ord \to (\forall n \in \mathbb{N}(\gamma[n] < \gamma[n + 1] < \gamma) \wedge \gamma = \sup\{\gamma[n] \mid n \in \mathbb{N}\})$.
Es gelte die sog. Bachmann-Bedingung:

Bedingung (BB): $\alpha, \gamma \in Lim \wedge \gamma[n] < \alpha \leq \gamma[n + 1] \Rightarrow \gamma[n] \leq \alpha[0]$

Im folgenden seien immer $\alpha, \widetilde{\alpha}, \beta, \gamma, \gamma_i, \delta, \delta_i \in Ord$ und $k, l, m, n, m_i \in \mathbb{N}$.

Definition 8.2
$\beta <^1_k \alpha :\Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \exists i \leq k(\beta = \alpha[i])$.
$<_k$ sei die transitive Hülle von $<^1_k$.

$\alpha \leq_k \beta :\Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (\alpha <_k \beta)$; $\beta >_k \alpha :\Leftrightarrow \alpha <_k \beta$; $\beta \geq_k \alpha :\Leftrightarrow \alpha \leq_k \beta$.

Lemma 8.3
(a) $\beta <_k \alpha \wedge k \leq m \Rightarrow \beta <_m \alpha$.
(b) $\gamma \in Lim \wedge \gamma[n] < \alpha \leq \gamma[n+1] \Rightarrow \gamma[n] <_0 \alpha$ *und* $\gamma[n] + 1 \leq_1 \alpha$.
(c) $\beta <_k \alpha \Rightarrow \beta + 1 \leq_{k+1} \alpha$.

Beweis:
(a) trivial.
(b): Wir beweisen beide Behauptungen durch transfinite Induktion nach α: Falls $\alpha = \gamma[n] + 1$, ist die Behauptung trivial, ansonsten folgt $\gamma[n] \leq \alpha[0] < \alpha[1] < \alpha$, falls $\alpha \in Lim$ und $\gamma[n] < \alpha[0]$, falls α Nachfolgerzahl, also mit der Induktionsvoraussetzung $\gamma[n] \leq_0 \alpha[0] <_0 \alpha$ und $\gamma[n] + 1 \leq_1 \alpha[1] <_1 \alpha$.
(c): Sei $\beta <_k^1 \alpha_1 \leq_k \alpha$ und $\beta = \alpha_1[i]$ mit $i \leq k$. Ist α_1 Nachfolgerzahl, folgt $\beta + 1 = \alpha_1 \leq_k \alpha$; ansonsten folgt nach (b) $\beta + 1 \leq_1 \alpha_1[i+1] <_{k+1} \alpha_1 \leq_k \alpha$.

Definition 8.4
Definition von F_α: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch transfinite Rekursion nach $\alpha \in Ord$:
$F_0(n) := n + 1$.
$F_{\alpha+1}(n) := F_\alpha^{n+1}(n)$.
$F_\alpha(n) := F_{\alpha[n]}(n)$, *falls $\alpha \in Lim$.*

Lemma 8.5
(a) $n < F_\alpha(n) < F_\alpha(n+1)$.
(b) $\beta <_k \alpha \Rightarrow F_\beta(k) \leq F_\alpha(k) \;\wedge\; F_\beta(k+1) < F_\beta^2(k+1) \leq F_\alpha(k+1)$.
(c) $F_\alpha(0) = 1$.
(d) $F_1(n) = 2 \cdot n + 1$.

Beweis:
(a), (b): Wir zeigen (a) und (b) simultan durch transfinite Induktion nach α, wobei es in (b) jeweils genügt, den Fall $\beta <_k^1 \alpha$ zu betrachten, da der allgemeine Fall dann immer mit der Induktionsvoraussetzung folgt.
Im Fall $\alpha = 0$ ist (a) klar, in (b) ist nichts zu zeigen.
Gilt $\alpha = \tilde{\alpha} + 1$, d.h. $\beta = \tilde{\alpha}$, so folgt (a) aus $n \overset{IV}{<} F_\beta(n) \overset{IV}{\leq} F_\beta^{n+1}(n) = F_{\beta+1}(n) = F_\beta^{n+1}(n) \overset{IV}{<} F_\beta^{n+1}(n+1) \overset{IV}{<} F_\beta^{n+2}(n+1) = F_\alpha(n+1)$,
und (b) aus $F_\beta(k) \overset{\text{IV für (a)}}{\leq} F_\beta^{k+1}(k) = F_\alpha(k)$ und $F_\beta(k+1) \overset{\text{IV für (a)}}{<}$

$F_\beta F_\beta(k+1) = F_\beta^2(k+1) \overset{\text{IV für (a)}}{\leq} F_\beta^{k+2}(k+1) = F_\alpha(k+1)$.
Sei nun $\alpha \in Lim$.
Zu (a): $n \overset{IV}{<} F_{\alpha[n]}(n) = F_\alpha(n)$.
Weiter $\alpha[n] <_0 \alpha[n+1] \Rightarrow F_\alpha(n) = F_{\alpha[n]}(n) \overset{\text{IV für (b)}}{\leq} F_{\alpha[n+1]}(n) \overset{\text{IV für (a)}}{<} F_{\alpha[n+1]}(n+1) = F_\alpha(n+1)$.
Zu (b): Sei $\beta = \alpha[i]$ mit $i \leq k$. Nach Lemma 8.3 (b) folgt $\alpha[i] \leq_0 \alpha[k]$, also $F_\beta(k) = F_{\alpha[i]}(k) \overset{\text{IV für (b)}}{\leq} F_{\alpha[k]}(k) = F_\alpha(k)$ und $F_\beta(k+1) \overset{\text{IV für (a)}}{<} F_\beta^2(k+1) \overset{\text{IV für (a)}}{\leq} F_\beta^{k+2}(k+1) = F_{\beta+1}(k+1) \leq F_\alpha(k+1)$ [letzteres folgt aus $\beta + 1 \leq_{k+1} \alpha$ und dem ersten Teil von (b)].
(c) folgt sofort durch transfinite Induktion nach α.
(d): $F_1(n) = F_0^{n+1}(n) = n + n + 1 = 2{\cdot}n + 1$.

Definition 8.6
(1) $0 \neq \alpha \in Ord \Rightarrow \alpha^- := \alpha[0]$.
(2) *Definition von $n(\alpha)$ für $\alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ durch transfinite Rekursion nach α:*
(i) $n(0) := 0$.
(ii) $n(\alpha) := n(\alpha^-) + 1$ *für* $\alpha > 0$.

Lemma 8.7
(a) $\beta <_0 \alpha \Rightarrow n(\beta) < n(\alpha)$.
(b) $\alpha \in Lim \Rightarrow n(\alpha[k]) \geq k$.
(c) $\beta < \alpha \Rightarrow \beta <_{n(\beta)} \alpha$.
(d) $\forall m \in \mathbb{N}(F_{n(\alpha)}(m) \leq F_\alpha(m))$.
(e) $m \geq 1 \Rightarrow F_n(m) \geq 2{\cdot}n + m + 1$.
(f) $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0 \Rightarrow F_\alpha(n) \geq 2{\cdot}n + 1$.
(g) $n \geq 2$, $\alpha > 1 \Rightarrow F_\alpha(n) > 2{\cdot}n + 1$.

Beweis:
(a) ist trivial.
(b) folgt aus $0 \leq_0 \alpha[0] <_0 \alpha[1] <_0 \cdots <_0 \alpha[k]$ und (a).
(c) Zeige $\beta < \alpha \Rightarrow \beta \leq \alpha[n(\beta)]$. (Daraus folgt dann die Behauptung sofort durch transfinite Induktion nach α).
Falls α Nachfolgerzahl, ist die Hilfsbehauptung klar.

Falls $\alpha \in Lim \quad \beta \leq \alpha[0]$, ist die Hilfsbehauptung trivial.
Falls $\alpha \in Lim \quad \beta > \alpha[0]$, folgt
$\exists n(\alpha[n] \leq \beta < \alpha[n+1])$.
Nach (b) gilt $n(\alpha[n]) \geq n$.
Falls $\beta = \alpha[n]$, folgt $\beta = \alpha[n] = \alpha[n(\beta)]$.
Falls $\beta > \alpha[n]$, folgt aus Lemma 8.3 (b)
$\alpha[n] <_0 \beta$ also $n(\beta) \geq n(\alpha[n]) + 1 \geq n + 1$.
Es gilt dann $\beta < \alpha[n+1] \leq \alpha[n(\beta)]$.
(d) Die Behauptung für $m = 0$ folgt aus Lemma 8.5(c).
Beweis der Behauptung für $m > 0$ durch transfinite Induktion nach α:
Falls $\alpha = 0$, ist die Behauptung klar.
Falls $\alpha = \gamma + 1$, folgt

$$F_{\gamma+1}(m) = F_\gamma^{m+1}(m) \overset{IV}{\geq} F_{n(\gamma)}^{m+1}(m) = F_{n(\gamma)+1}(m) = F_{n(\gamma+1)}(m) = F_{n(\alpha)}(m).$$

Falls $\alpha \in Lim$, folgt

$$\begin{aligned} F_\alpha(m) &= F_{\alpha[m]}(m) \\ &\geq F_{\alpha[1]}(m) \qquad [\alpha[m] \geq_0 \alpha[1]] \\ &\geq F_{\alpha[0]+1}(m) \qquad [\alpha[1] \geq_1 \alpha[0]+1] \\ &= F_{\alpha[0]}^{m+1}(m) \\ &\overset{IV}{\geq} F_{n(\alpha[0])}^{m+1}(m) \\ &= F_{n(\alpha[0])+1}(m) \\ &= F_{n(\alpha)}(m). \end{aligned}$$

(e) Beweis durch Induktion nach n:
Falls $n = 0$ gilt, ist die Behauptung klar, und $F_{n+1}(m) = F_n^{m+1}(m) \geq F_n^2(m) \geq F_1 F_n(m) \overset{IV}{\geq} 2{\cdot}(2{\cdot}n + m + 1) + 1 \geq 2{\cdot}n + m + 3$.
(f) Falls $n = 0$ folgt die Behauptung aus Lemma 8.5(c), ansonsten gilt $\alpha \neq 0 \overset{(c)}{\Rightarrow} 0 <_0 \alpha \overset{8.3(c)}{\Rightarrow} 1 \leq_1 \alpha \Rightarrow F_\alpha(n) \overset{8.5\,(b)}{\geq} F_1(n) \overset{8.5\,(d)}{=} 2{\cdot}n + 1$.
(g) $n \geq 2,\ 1 <_{n-1} \alpha \Rightarrow 2{\cdot}n + 1 \overset{8.5(d)}{=} F_1(n) \overset{8.5(b)}{<} F_\alpha(n)$.

Bemerkung 8.8
Sei $\beta <_k^{1,*} \alpha :\Leftrightarrow (\alpha \neq 0 \wedge \beta = \alpha[k])$.
Sei $<_k^*$ *die transitive Hülle von* $<_k^{1,*}$,
d.h. $\alpha <_k^* \beta \Leftrightarrow \alpha \underbrace{[k] \cdots [k]}_{n\ mal} = \beta$ *für ein* $n \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $\alpha <_k \beta \Leftrightarrow \alpha <_k^* \beta$.

Beweis:
Die Richtung $\Leftarrow$ ist klar.
Wir beweisen die umgekehrte Richtung durch transfinite Induktion nach β.
Falls $\alpha = \beta[k]$, ist die Behauptung klar.
Falls $\alpha = \beta[i]$ für ein $i < k$ und $\beta \in Lim$, folgt aus $\beta[i] <_0 \beta[i+1] <_0 \cdots <_0 \beta[k]$ dann $\alpha = \beta[i] <_k \beta[k]$, also nach Induktionsvoraussetzung $\beta[i] <_k^* \beta[k] <_k^{1,*} \beta$.
Falls $\alpha <_k \gamma <_k^1 \beta$, folgt aus der Induktionsvoraussetzung und dem eben bewiesenen $\alpha <_k^* \gamma <_k^* \beta$.

Folgerung 8.9
$\alpha <_k \beta$, $\gamma <_k \beta$, $\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha <_k \gamma$.

Beweis:
Nach Lemma 8.8 existieren n, m mit
$\alpha = \beta \underbrace{[k]\cdots[k]}_{n \text{ mal}}$ und
$\gamma = \beta \underbrace{[k]\cdots[k]}_{m \text{ mal}}$.
Da $\alpha < \gamma$, folgt $n > m$, also $\alpha = \gamma \underbrace{[k]\cdots[k]}_{n-m \text{ mal}}$.

Definition 8.10
Sei $l \geq 1$.
$\alpha \tilde{<}_l^1 \beta :\Leftrightarrow \exists k < F_\beta(l)(\alpha <_k \beta) \Leftrightarrow \alpha <_{F_\beta(l)-1} \beta$.
$\alpha \tilde{<}_l \beta :\Leftrightarrow \exists k \geq 1 \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_k \exists m_1, \ldots, m_k$
$(\alpha <_{m_1} \gamma_1 <_{m_2} \gamma_2 <_{m_3} \cdots <_{m_k} \gamma_k = \beta$
mit $\forall i < k(m_i < F_{\gamma_i}(m_{i+1}))$ und $m_k < F_{\gamma_k}(l))$.
$\alpha \tilde{\leq}_l \beta :\Leftrightarrow \alpha = \beta \vee \alpha \tilde{<}_l \beta$.
$\alpha \tilde{>}_l \beta \Leftrightarrow \beta \tilde{<}_l \alpha$; $\alpha \tilde{\geq}_l \beta \Leftrightarrow \beta \tilde{\leq}_l \alpha$.

Folgerung 8.11
(a) $\alpha \tilde{<}_l^1 \beta \Rightarrow \alpha \tilde{<}_l \beta$.
(b) $\alpha \tilde{<}_l \beta \tilde{<}_l \gamma \Rightarrow \alpha \tilde{<}_l \gamma$.

Beweis:
(a) ist trivial.

(b) Sei $\beta <_{m_1} \gamma_1 <_{m_2} \gamma_2 <_{m_3} \cdots <_{m_k} \gamma_k = \gamma$ mit $m_i < F_{\gamma_i}(m_{i+1})$ und $m_k < F_{\gamma_k}(l)$.
Sei $\alpha <_{n_1} \delta_1 <_{n_2} \delta_2 <_{n_3} \cdots <_{n_r} \delta_r = \beta$ mit $n_i < F_{\delta_i}(n_{i+1})$ und $n_r < F_\beta(l)$.
Sei $\widetilde{m}_k := F_\gamma(l) - 1$, $\widetilde{m}_{k-1} := F_{\gamma_{k-1}}(\widetilde{m}_k) - 1$, $\cdots$, $\widetilde{m}_1 := F_{\gamma_1}(\widetilde{m}_2) - 1$. Dann folgt $m_i \leq \widetilde{m}_i$, $l \leq \widetilde{m}_i$ sowie $\beta <_{\widetilde{m}_1} \gamma_1 <_{\widetilde{m}_2} \gamma_2 <_{\widetilde{m}_3} \cdots <_{\widetilde{m}_k} \gamma$. Da $n_r < F_\beta(l) \leq F_\beta(\widetilde{m}_1)$, folgt $\alpha <_{n_1} \delta_1 <_{n_2} \cdots <_{n_r} \delta_r = \beta <_{\widetilde{m}_1} \gamma_1 <_{\widetilde{m}_2} \cdots <_{m_k} \gamma_k = \gamma$ mit $n_i < F_{\delta_i}(n_{i+1})$, $n_r < F_\beta(\widetilde{m}_1)$, $\widetilde{m}_i < F_{\gamma_i}(\widetilde{m}_{i+1})$, $\widetilde{m}_k < F_{\gamma_k}(l)$.

Definition 8.12
Sei $f : \gamma \to Ord$ mit $\gamma \subset Ord$.
f heißt gut wachsend, falls für alle $\alpha, \beta \in \gamma$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:
(1) $\alpha \tilde{<}^1_n \beta \Rightarrow f(\alpha) \tilde{<}_n f(\beta)$ (falls $n \geq 1$).
(2) $\alpha + 1 < \gamma \Rightarrow f(\alpha) + 1 \tilde{\leq}_1 f(\alpha + 1)$.
(3) $F_\alpha(n) \leq F_{f(\alpha)}(n)$.
(4) $n(\alpha) \leq n(f(\alpha))$.

Bemerkung 8.13
Sei $f : \gamma \to Ord$ mit $\gamma \subset Ord$, so daß gilt:
$\forall k \forall \alpha, \beta \in \gamma(\alpha <_k \beta \Rightarrow f(\alpha) <_k f(\beta))$.
Dann ist f gut wachsend.
Es gilt dann sogar $n(f(\alpha)) \geq n(f(0)) + n(\alpha)$.

Beweis:
Wir zeigen zunächst (3) von 8.12 und $n(f(\alpha)) \geq n(f(0)) + n(\alpha)$ (und damit (4)) durch transfinite Induktion nach α:
Falls $\alpha = 0$ gilt, folgt wegen $0 \leq_0 f(\alpha)$, $F_0(n) \leq F_{f(\alpha)}(n)$, und, da $n(\alpha) = 0$, $n(f(\alpha)) = n(f(0)) + n(\alpha)$.
Falls $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, folgt $F_\alpha(0) = 1 = F_{f(\alpha)}(0)$. Weiter gilt, falls $n \geq 1$, wegen $\widetilde{\alpha} <_0 \alpha$, $f(\widetilde{\alpha}) <_0 f(\alpha)$, also $f(\widetilde{\alpha}) + 1 \leq_1 f(\alpha)$. Daraus folgt dann $F_\alpha(n) = F^{n+1}_{\widetilde{\alpha}}(n) \overset{IV}{\leq} F^{n+1}_{f(\widetilde{\alpha})}(n) = F_{f(\widetilde{\alpha})+1}(n) \leq F_{f(\alpha)}(n)$.
Daneben folgt $n(\widetilde{\alpha}) + n(f(0)) \overset{IV}{\leq} n(f(\widetilde{\alpha})) \overset{f(\widetilde{\alpha}) <_0 f(\widetilde{\alpha}+1)}{<} n(f(\widetilde{\alpha} + 1)) = n(f(\alpha))$, also $n(f(\alpha)) \geq n(\alpha) + n(f(0))$.
Falls $\alpha \in Lim$ gilt, folgt $F_\alpha(n) = F_{\alpha[n]}(n) \overset{IV}{\leq} F_{f(\alpha[n])}(n) \leq F_{f(\alpha)}(n)$, denn aus $\alpha[n] <_n \alpha$ folgt $f(\alpha[n]) <_n f(\alpha)$. Weiter gilt wegen $\alpha[0] <_0 \alpha$ dann $f(\alpha[0]) <_0 f(\alpha)$ also $n(\alpha) + n(f(0)) = n(\alpha[0]) + n(f(0)) + 1 \overset{IV}{\leq} n(f(\alpha[0])) + 1 \leq n(f(\alpha))$.

Zu (1): Gilt $\alpha \tilde{<}_n^1 \beta$, also $\alpha <_{F_\beta(n)-1} \beta$, so folgt $f(\alpha) <_{F_\beta(n)-1} f(\beta)$, wegen (3) also $f(\alpha) <_{F_{f(\beta)}(n)-1} f(\beta)$, d.h. $f(\alpha) \tilde{<}_n f(\beta)$.
Zu (2): Aus $\alpha <_0 \alpha + 1$ folgt $f(\alpha) <_0 f(\alpha + 1)$, also $f(\alpha) + 1 \leq_1 f(\alpha + 1)$ mit $1 < F_{f(\alpha+1)}(1)$.

Kapitel 9

$<_k$ und F_k mit spezieller Fundamentalfolgenzuordnung

In diesem Kapitel verfolgen wir die Relation $<_k$ und die Funktionen F_k aus Kapitel 8 weiter, falls die Fundamentalfolgen neben der Bachmann-Bedingung zusätzlich die Bedingung (+) der Verträglichkeit mit der Summe erfüllen:

Bedingung (+): $\alpha + \beta =_{NF} \alpha + \beta \in Ord,\ \beta \neq 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)[n] = \alpha + (\beta[n])$.

Weiter wird in der zweiten Hälfte des Kapitels (ab Lemma 9.3) zusätzlich die Bedingung (P) gefordert:

Bedingung (P) $\rho \in P \Rightarrow (\forall l(\rho[l] \in P \cup \{0\}) \vee \exists \rho' \in P \forall l(\rho[l] = \rho' \cdot (l+1)))$.

Lemma 9.1
(a) $F_\beta(n) \leq F_{\alpha+\beta}(n)$.
(b) $\alpha + \beta =_{NF} \alpha + \beta \Rightarrow n(\alpha + \beta) = n(\alpha) + n(\beta)$.
(c) $n(\beta) \leq n(\alpha + \beta)$ *(ohne Voraussetzung von (b)).*

Beweis:
(a)Es genügt den Fall $\alpha \in P$ zu betrachten.
Beweis dann durch transfinite Induktion nach β:
Falls $\beta = 0$ oder $\alpha + \beta = \beta$, ist die Behauptungtrivial.
Falls $\beta = \gamma + 1$, folgt

$$F_{\alpha+\beta}(n) = F^{n+1}_{\alpha+\gamma}(n) \overset{IV}{\geq} F^{n+1}_\gamma(n) = F_\beta(n).$$

Falls $\beta \in Lim,\ \alpha+\beta {=_{NF}} \alpha+\beta$, folgt

$F_{\alpha+\beta}(n) = F_{(\alpha+\beta)[n]}(n) = F_{\alpha+(\beta[n])}(n) \overset{IV}{\geq} F_{\beta[n]}(n) = F_\beta(n)$.

(b) ist klar.

(c) folgt aus (b), da $\alpha+\beta {=_{NF}} \alpha_1+\beta$ für ein α_1.

Lemma 9.2

$\alpha, \beta \neq 0,\ n \geq 1 \Rightarrow F_{\alpha\#\beta}(n) \geq F_\alpha(n)+2.$

Beweis:

O.E. sei β additive Hauptzahl.

Sei $\alpha = \gamma+\delta$ mit $(min(P(\gamma)) \geq \beta$ oder $P(\gamma) = \emptyset)$ und $\delta < \beta$. Zu zeigen ist $F_{\gamma+\beta+\delta}(n) \geq F_{\gamma+\delta}(n)+2$. Zeige dies durch transfinite Induktion nach $\delta < \beta$.

Falls $\delta = 0$ folgt $\gamma \neq 0$, also $\gamma+1 \leq_1 \gamma+\beta \Rightarrow F_{\gamma+\beta}(n) \geq F_{\gamma+1}(n) = F_\gamma^{n+1}(n) = F_\gamma(F_\gamma^n(n)) \geq F_1(F_\gamma(n)) = 2{\cdot}F_\gamma(n)+1 \geq F_\gamma(n)+2$.

Falls $\delta = \delta'+1$, gilt $F_{\gamma+\beta+\delta'+1} = F^{n+1}_{\gamma+\beta+\delta'}(n) \overset{IV}{\geq} F^{n+1}_{\gamma+\delta'}(n)+2 = F_{\gamma+\delta}(n)+2$.

Falls $\delta \in Lim$, gilt $F_{\gamma+\beta+\delta}(n) = F_{\gamma+\beta+(\delta[n])}(n) \overset{IV}{\geq} F_{\gamma+(\delta[n])}(n)+2 = F_{\gamma+\delta}(n)+2$.

Im Folgenden soll die Fundamentalfolgenzuordnung zusätzlich die Bedingung (P) erfüllen.

Lemma 9.3

$\alpha \tilde{<}^1_n \beta \Rightarrow \alpha\#\gamma \tilde{<}^1_n \beta\#\gamma$.

Beweis: Der Fall $\gamma = 0$ ist trivial.

Falls $\gamma = 1$, folgt aus $\alpha <_{F_\beta(n)-1} \beta$, $\alpha+1 \leq_{F_\beta(n)} \beta <_0 \beta+1$ mit $F_\beta(n) < F_{\beta+1}(n)$ für $n \geq 1$.

Es genügt, die Behauptung für additive Hauptzahlen $\gamma > 1$ zu zeigen.

Sei $\alpha <_l \beta$ mit $l < F_\beta(n)$.

Sei $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$ mit $(\alpha_1 = 0$ oder $min(P(\alpha_1) \geq \gamma)$ und $\alpha_2 < \gamma$.

Sei $\beta = \beta_1+\beta_2$ mit $(\beta_1 = 0$ oder $min(P(\beta_1) \geq \gamma)$ und $\beta_2 < \gamma$.

Wegen $\alpha < \beta$ folgt $\alpha_1 < \beta_1 \vee (\alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 < \beta_2)$.

Fall 1: $\alpha_1 = \beta_1$. Dann folgt aus $\alpha <_l \beta$ dann $\alpha_2 <_l \beta_2$, also $\alpha\#\gamma = \alpha_1+\gamma+\alpha_2 <_l \beta_1+\gamma+\beta_2 = \beta\#\gamma$ mit $l < F_\beta(n) \leq F_{\beta\#\gamma}(n)$.

Fall 2: $\alpha_1 < \beta_1$. Dann folgt zunächst $\alpha_1+\gamma \leq \beta_1$ und $\alpha_1+\gamma{\cdot}2 \leq \beta_1+\gamma$.

Behauptung: $\exists l' \leq \max\{l+2, n(\gamma){\cdot}2\}\ (\alpha_1+\gamma{\cdot}2 \leq_{l'} \beta_1+\gamma \vee (\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1+\gamma \leq_{l'} \beta_1+\gamma))$.

Beweis:
Fall 2.1: $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 = \beta_1 + \gamma$: trivial.
Fall 2.2: $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 = \beta_1$:
Dann gilt $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 <_0 \beta_1 + \gamma$.
Fall 2.3: Ansonsten gilt $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 < \beta_1$.
Sei ρ minimal mit $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq \rho \leq_l \beta_1$.
Wegen $\rho \leq_l \beta_1 \leq_0 \beta$, $\alpha <_l \beta$ und $\alpha < \alpha + \gamma{\cdot}2 \leq \rho$ folgt nach Folgerung 8.9 $\alpha <_l \rho$, also $\alpha \leq \rho[l] < \alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq \rho$. Sei $\rho =_{NF} \rho_1 + \rho_2$ mit $\rho_2 \in P$. Dann gilt $\rho[l] = \rho_1 + \rho_2[l]$, wobei $\rho_2[l] \in P$ oder $\rho_2[l] = (l+1){\cdot}\rho'$ für ein $\rho' \in P$ oder $\rho_2[l] = 0$. Wir haben nun $\alpha_1 \leq \rho_1 + \rho_2[l] = \rho[l] < \alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq \rho_1 + \rho_2$. $(*)$
Sei $\alpha_1 = \alpha_3 + \gamma{\cdot}m$ mit $\alpha_3 = 0 \vee \min(P(\alpha_3)) > \gamma$.
Fall 2.3.1: $\alpha_3 < \rho_1 + \rho_2[l]$:
Da $\alpha_3 < \rho_1 + \rho_2[l] < \alpha_1 + \gamma{\cdot}2 = \alpha_3 + \gamma{\cdot}(m+2)$, folgt $\rho_2[l] = \gamma{\cdot}(l+1)$ oder $\rho_2[l] \leq \gamma$.
Fall 2.3.1.1: $\rho_2[l] = \gamma{\cdot}(l+1)$ mit $l > 0$:
Dann gilt wegen $\alpha_1 \leq \rho_1 + \rho_2[l] < \alpha_1 + \gamma{\cdot}2$ für ein $s \in \{1,2\}$ $\rho_1 + \rho_2[l+s] = \alpha_1 + \gamma{\cdot}2 <_{l+s} \rho_1 + \rho_2 = \rho \leq_l \beta_1 <_0 \beta_1 + \gamma$.
Fall 2.3.1.2: $\rho_2[l] \leq \gamma$:
Dann folgt $\rho_1 = \alpha_1 \vee \rho_1 = \alpha_1 + \gamma$ oder $\rho_1 + \gamma =_{NF} \rho_1 + \gamma = \alpha_1$.
(Denn aus $(*)$ folgt $\alpha_1 \leq \rho_1 + \gamma < \alpha_1 + \gamma{\cdot}3$ und es kann wegen $\rho =_{NF} \rho_1 + \rho_2 \geq \alpha_1 + \gamma{\cdot}2 > \rho_1 + \rho_2[l] \geq \alpha_1$ nicht $\rho_1 \neq 0 \wedge \min P(\rho_1) < \gamma$ gelten).
Fall 2.3.1.2.1: $\rho_1 = \alpha_1$:
Da $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq \rho_1 + \rho_2$, folgt $\gamma{\cdot}2 \leq \rho_2$, also nach Lemma 8.7(c) $\gamma{\cdot}2 \leq_{n(\gamma\cdot 2)} \rho_2$. Da weiterhin $n(\gamma{\cdot}2) = n(\gamma){\cdot}2$ gilt, folgt $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq_{n(\gamma)\cdot 2} \rho_1 + \rho_2 \leq_l \beta_1 <_0 \beta_1 + \gamma$.
Fall 2.3.1.2.2: $\rho_1 = \alpha_1 + \gamma$:
Da $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq \rho_1 + \rho_2$, folgt $\gamma \leq \rho_2$, also $\gamma \leq_{n(\gamma)} \rho_2$ und somit $\alpha_1 + \gamma{\cdot}2 \leq_{n(\gamma)} \rho_1 + \rho_2 <_l \beta_1 + \gamma$.
Fall 2.3.1.2.3: $\rho_1 + \gamma =_{NF} \rho_1 + \gamma = \alpha_1$:
Dann folgt $\alpha_1 \overset{(*)}{\leq} \rho_1 + \rho_2[l] \leq \rho_1 + \gamma = \alpha_1$, also $\rho_2[l] = \gamma$ und $\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2[l]$, und, wegen $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \leq \rho_1 + \rho_2[l] = \alpha_1$, $\alpha_2 = 0$.
Falls $\forall k(\rho_2[k] = \gamma{\cdot}(m+1))$ folgt $\alpha_1 + \gamma = \rho[l+1] <_{l+1} \rho <_l \beta_1 + \gamma$.
Ansonsten folgt $\rho_2[l+1] \in P$, also $\alpha_1 = \rho_1 + \rho_2[l] = \rho_1 + \gamma < \rho_1 + \gamma + \gamma < \rho_1 + \rho_2[l+1] <_{l+1} \rho$, also $\alpha_1 + \gamma = \rho_1 + \gamma + \gamma <_{n(\gamma)\cdot 2} \rho_1 + \rho_2[l+1] <_{l+1} \rho <_l \beta_1 + \gamma$.
Fall 2.3.2: $\alpha_3 = \rho_1 + \rho_2[l]$:
Da $\alpha \leq \rho[l] = \alpha_3 \leq \alpha$, folgt $\alpha = \alpha_1 = \alpha_3$ und $\alpha_2 = 0$.
Es folgt $\forall k(\rho_2[k] \in P \cup \{0\})$ oder $\exists \tilde{\rho} \in P \forall k(\rho_2[k] = \tilde{\rho}{\cdot}(k+1))$,

weiter $P(\rho_2[l]) > \gamma$ oder $\rho_2[l] = 0$.
Gilt $\forall k(\rho_2[k] = \widetilde{\rho}\cdot(k+1))$ mit $\widetilde{\rho} \in P$, so folgt $\widetilde{\rho} > \gamma$, und aus $\gamma <_{n(\gamma)} \widetilde{\rho}$ dann $\alpha_1 + \gamma <_{n(\gamma)} \alpha + \widetilde{\rho} = \rho[l+1] <_{l+1} \rho \leq_l \beta_1 <_0 \beta_1 + \gamma$.
Gilt $\forall k(\rho_2[k] \in P \cup \{0\})$ so folgt $\rho_2[l] + \gamma \overset{(**)}{<_{\max\{n(\gamma),l+1\}}} \rho_2$, also $\alpha_1 + \gamma = \rho_1 + \rho_2[l] + \gamma <_{max\{n(\gamma),l+1\}} \rho_1 + \rho_2 = \rho \leq_l \beta_1 <_0 \beta_1 + \gamma$.
[Beweis von $(**)$:
Falls $\rho_2[l] = 0$ folgt dies aus $\gamma <_{n(\gamma)} \rho_2$. Sei also $\rho_2[l] \neq 0$. Dann folgt $\rho_2[l] > \gamma$. Sei $m := \max\{n(\gamma), l+1\}$, weiter δ minimal mit $\rho_2[l]+\gamma \leq \delta \leq_m \rho_2$ Angenommen, $\delta > \rho_2[l] + \gamma$. Da $\rho_2[l] + 1 <_1 \rho_2[l+1] <_{l+1} \rho_2$ und $\rho_2[l] + 1 < \rho_2[l] + \gamma \leq \delta$, folgt $\rho_2[l] + 1 <_m \delta$, also $\rho_2[l] + 1 \leq \delta[m] < \rho_2[l] + \gamma$.
Aus $\rho_2[l] + 1 \leq \delta[m] < \rho_2[l] + \gamma$ folgt $\delta[m] = \rho_2[l] + \xi$ für ein $1 \leq \xi < \rho_2[l]$, also wegen Bedingung (P) $\delta \notin P$. Sei deshalb $\delta =_{NF} \delta_1 + \delta_2$ mit $\delta_1 \in P$ und $\delta_2 \neq 0$. Wäre $\delta_1 > \rho_2[l]$, so wäre $\rho_2[l] + \gamma \leq \delta_1 <_l \rho_2$ im Widerspruch zur Minimalität von δ. Also gilt $\delta_1 = \rho_2[l]$, d.h. $\delta = \rho_2[l] + \delta_2$ mit $\delta_2 > \gamma$, woraus aber dann $\rho_2[l] + \gamma <_{n(\gamma)} \rho_2[l] + \delta_2$ im Widerspruch zur Minimalität von δ folgt.]

Im Fall 2 folgt also immer $\alpha_1 + \gamma\cdot 2 \leq_{l'} \beta_1 + \gamma$ oder $(\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1 + \gamma \leq_{l'} \beta_1 + \gamma)$ mit $l' \leq \max\{l+2, n(\gamma)\cdot 2\}$. Nun gilt $l + 2 < F_\beta(n) + 2 \overset{9.2}{\leq} F_{\beta\#\gamma}(n)$, und $n(\gamma)\cdot 2 \overset{8.7(e)}{<} F_{n(\gamma)}(n) \overset{8.7(d)}{\leq} F_\gamma(n) \overset{9.2}{\leq} F_{\beta\#\gamma}(n)$, also $l' < F_{\beta\#\gamma}(n)$.
Gilt $\alpha_1 + \gamma\cdot 2 \leq_{l'} \beta_1 + \gamma$, so folgt aus $\alpha_1 + \alpha_2 <_l \beta_1 + \beta_2$ und $\alpha_1 + \alpha_2 < \beta_1 \leq_0 \beta_1 + \beta_2$ zunächst $\alpha_1 + \alpha_2 <_l \beta_1 <_0 \beta_1 + \gamma + \beta_2$. Da $\alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_1 + \gamma\cdot 2 <_{l'} \beta_1 + \gamma + \beta_2$, und $l \leq l'$, folgt nun $\alpha_1 + \alpha_2 <_{l'} \alpha_1 + \gamma\cdot 2$ und somit $\alpha_2 <_{l'} \gamma\cdot 2$. Wegen $\alpha_2 < \gamma <_0 \gamma\cdot 2$ folgt $\alpha_2 <_{l'} \gamma$. Dann folgt $\alpha\#\gamma = \alpha_1 + \gamma + \alpha_2 <_{l'} \alpha_1 + \gamma\cdot 2 <_{l'} \beta_1 + \gamma + \beta_2 = \beta\#\gamma$ mit $l' < F_{\beta\#\gamma}(n)$. Im anderen Fall folgt die Behauptung direkt aus $\alpha\#\gamma = \alpha_1 + \gamma \leq_{l'} \beta_1 + \gamma \leq_0 \beta_1 + \gamma + \beta_2 = \beta\#\gamma$ und $\alpha\#\gamma \neq \beta\#\gamma$.

Folgerung 9.4
$\alpha \widetilde{<}_l \beta \Rightarrow \alpha\#\gamma \widetilde{<}_l \beta\#\gamma$.

Beweis:
Gelte $\alpha <_{m_1} \gamma_1 <_{m_2} \cdots <_{m_k} \gamma_k = \beta$ mit $\forall i < k(m_i < F_{\gamma_i}(m_{i+1}))$ und $m_k < F_\beta(l)$. O.E. sei $m_i = F_{\gamma_i}(m_{i+1}) - 1$ und $m_k = F_\beta(l) - 1$. Dann folgt aus Lemma 9.3 $\alpha\#\gamma <_{\widetilde{m}_1} \gamma_1\#\gamma <_{\widetilde{m}_2} \cdots <_{\widetilde{m}_k} \gamma_k\#\gamma = \beta\#\gamma$ mit $\widetilde{m}_k := F_{\beta\#\gamma}(l) - 1$ und $\widetilde{m}_i := F_{\gamma_i\#\gamma}(m_{i+1}) - 1 < F_{\gamma_i\#\gamma}(\widetilde{m}_{i+1})$, also die Behauptung.

Folgerung 9.5
Sei $\alpha_i \tilde{<}_l \beta_i$ für $i = 1 \ldots m$. Dann gilt $\alpha_1 \# \cdots \# \alpha_m \tilde{<}_l \beta_1 \# \cdots \# \beta_m$.

Beweis:
$\alpha_1 \# \cdots \# \alpha_m$
$\tilde{<}_l \beta_1 \# \alpha_2 \# \alpha_3 \# \cdots \# \alpha_m$
$\tilde{<}_l \beta_1 \# \beta_2 \# \alpha_3 \# \alpha_4 \# \cdots \# \alpha_m$
$\tilde{<}_l \cdots \tilde{<}_l \beta_1 \# \beta_2 \# \cdots \# \beta_m$.
Wegen Folgerung 8.11(b) folgt die Behauptung.

Folgerung 9.6
*Sei $\gamma \in Ord$ mit $\gamma \# \beta \in Ord$ und $f : \gamma \to Ord,\ f(\alpha) := \alpha \# \beta$.
Dann ist f gut wachsend. (Vgl. Definition 8.12.)*

Beweis:
Betrachte (1) - (4) von Definition 8.12:
(1) folgt aus Lemma 9.3.
(2) ist trivial, da $f(\alpha) + 1 = f(\alpha + 1)$.
(3) folgt aus Lemma 9.2.
(4) folgt aus Lemma 9.1(b).

Definition 9.7
(1) Definition von $\alpha \overset{\#}{\cdot} n$ für $\alpha \in Ord,\ n \in \mathbb{N}$:
$\alpha \overset{\#}{\cdot} 0 := \alpha,\ \alpha \overset{\#}{\cdot} (n+1) := (\alpha \overset{\#}{\cdot} n) \# \alpha$.
(2) Für $n, m \in \mathbb{N}$ ist $n \cup m := \max\{n, m\}$.

Definition 9.8
$\alpha \uplus \beta := \max\{\alpha, \beta\} + (\max\{n(\alpha), n(\beta)\} - n(\max\{\alpha, \beta\}))$.

Lemma 9.9
(a) $\max\{\alpha, \beta\} \leq \alpha \uplus \beta \leq \max\{\alpha, \beta\} + \max\{n(\beta) - n(\alpha), n(\alpha) - n(\beta)\} <$
$\max\{\alpha, \beta\} + \omega$.
(b) $\alpha \uplus \beta = \beta \uplus \alpha$.
(c) $n(\alpha \uplus \beta) = \max\{n(\alpha), n(\beta)\}$.
(d) $\alpha \tilde{\leq}_1 \alpha \uplus \beta,\ \beta \tilde{\leq}_1 \alpha \uplus \beta$.
(e) $\alpha \uplus (\beta \uplus \gamma) = (\alpha \uplus \beta) \uplus \gamma$.
(f) $\max\{\alpha, \beta\} \leq \max\{\gamma, \delta\}, \max\{n(\alpha), n(\beta)\} \leq \max\{n(\gamma), n(\delta)\}$
$\Rightarrow \alpha \uplus \beta \leq \gamma \uplus \delta$.
(g) $(\alpha \# \gamma) \uplus (\beta \# \gamma) = (\alpha \uplus \beta) \# \gamma$.

Beweis:
(a),(b): klar.
(c) $n(\alpha \uplus \beta) = n(\max\{\alpha,\beta\}) + (\max\{n(\alpha), n(\beta)\} - n(\max\{\alpha,\beta\}))$
$= \max\{n(\alpha), n(\beta)\}$.
(d) $\alpha \leq \alpha \uplus \beta$, also $\alpha \leq_{n(\alpha)} \alpha \uplus \beta$. Wegen $n(\alpha) \leq n(\alpha \uplus \beta) < F_{\alpha \uplus \beta}(1)$ folgt $\alpha \tilde{\leq}_1 \alpha \uplus \beta$. Mit (b) folgt auch $\beta \tilde{\leq}_1 \alpha \uplus \beta$.
(e) Nach (a) ist $\max\{\alpha,\beta,\gamma\} \leq \alpha \uplus (\beta \uplus \gamma) < \max\{\alpha,\beta,\gamma\} + \omega$ und nach (c) $n(\alpha \uplus (\beta \uplus \gamma)) = \max\{n(\alpha), n(\beta), n(\gamma)\}$, also $\alpha \uplus (\beta \uplus \gamma) = \max\{\alpha,\beta,\gamma\} + (\max\{n(\alpha), n(\beta), n(\gamma)\} - n(\max\{\alpha,\beta,\gamma\}))$. Genauso gilt $(\alpha \uplus \beta) \uplus \gamma = \max\{\alpha,\beta,\gamma\} + (\max\{n(\alpha), n(\beta), n(\gamma)\} - n(\max\{\alpha,\beta,\gamma\}))$.
(f) Sei $\omega{\cdot}\rho \leq \max\{\alpha,\beta\} < \omega{\cdot}(\rho+1)$ und $\omega{\cdot}\nu \leq \{\gamma,\delta\} < \omega{\cdot}(\nu+1)$. Dann folgt $\rho \leq \nu$ und $\omega{\cdot}\rho \leq \alpha \uplus \beta < \omega{\cdot}(\rho+1)$ und $\omega{\cdot}\nu \leq \gamma \uplus \delta < \omega{\cdot}(\nu+1)$. Falls $\rho < \nu$, folgt $\alpha \uplus \beta < \gamma \uplus \delta$. Ist dagegen $\rho = \nu$, folgt aus (a),(c) $\alpha \uplus \beta = \omega{\cdot}\rho + (\max\{n(\alpha), n(\beta)\} - n(\omega{\cdot}\rho)) \leq \omega{\cdot}\rho + (\max\{n(\gamma), n(\delta)\} - n(\omega{\cdot}\rho)) = \gamma \uplus \delta$.
(g) Wegen (b) sei o.E. $\alpha \geq \beta$. Dann folgt $\alpha \# \gamma \geq \beta \# \gamma$, also $(\alpha\#\gamma) \uplus (\beta\#\gamma) = (\alpha\#\gamma) + (\max\{n(\alpha\#\gamma), n(\beta\#\gamma)\} - n(\alpha\#\gamma)) = \alpha\#\gamma + (\max\{n(\alpha) + n(\gamma), n(\beta) + n(\gamma)\} - (n(\alpha) + n(\gamma))) = \alpha\#\gamma + (\max\{n(\alpha), n(\beta)\} - n(\alpha)) = (\alpha \uplus \beta)\#\gamma$.

Kapitel 10

$<_k$ und F_k auf $\psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$

In diesem Kapitel betrachten wir die Relation $<_k$ und die Funktionen F_k auf dem Ordinalzahlabschnitt $\psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ mit den Fundamentalfolgen aus Kapitel 4. Diese erfüllen die Bedingungen $(+)$ und (P) aus Kapitel 9. Daß sie die Bachmann-Bedingung erfüllen, weisen wir zunächst nach. Weiter werden wir die Verträglichkeit von $<_k$ mit ω^α und $\phi_\alpha\beta$ untersuchen.

Definition 10.1
Hilfsdefinition von β^- und $\alpha <_G \beta$ für $\alpha, \beta \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ mit $\beta \neq 0$:
Falls $dom(\beta) \in \{\{0\}, \mathbb{N}\}$, ist $\beta^- := \beta[0]$.
Falls $dom(\beta) = \mathrm{T}_u$, ist $\beta^- := \beta[\Omega_u]$.
Für $\beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ entspricht diese Definition von β^- der Definition aus 8.6.
$\alpha <_G^1 \beta :\Leftrightarrow \alpha = \beta^-$.
$<_G$ sei die transitive Hülle von $<_G$.
$\alpha \leq_G \beta :\Leftrightarrow (\alpha = \beta) \vee (\alpha <_G \beta)$.

Bemerkung 10.2
$\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow (\alpha <_G^1 \beta \Leftrightarrow \alpha <_0^1 \beta) \wedge (\alpha <_G \beta \Leftrightarrow \alpha <_0 \beta)$.

Lemma 10.3
(a) $\Omega_u < \beta \leq \Omega_{u+1}, \beta \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow \Omega_u <_G \beta$.
(b) $\alpha, \beta, \gamma \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \quad \alpha <_G \beta \quad \gamma + \beta =_{NF} \gamma + \beta$
$\quad \Rightarrow \gamma + \alpha <_G \gamma + \beta$.
(c) $\alpha, \beta \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \quad \alpha <_G \beta \quad \beta \in C_u(\beta)$
$\quad \Rightarrow \alpha \in C_u(\alpha) \quad \psi_u(\alpha) <_G \psi_u(\beta)$.

Beweis:
(a) folgt durch transfinite Induktion, da aus $\Omega_u < \beta \leq \Omega_{u+1}$ $\Omega_u \leq \beta^-$ folgt.
(b) ist klar.
(c) folgt, da $(\psi_u(\beta))^- = \psi_u(\beta^-)$ mit $\beta^- \in C_u(\beta^-)$.

Lemma 10.4
(a) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, $\alpha <_G \beta$, $\beta \in \mathrm{T}_u = dom(\gamma)$
$\Rightarrow \gamma[\alpha] <_G \gamma[\beta]$.
(b) Sei $\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap Lim$, $dom(\alpha) = \mathbb{N} \Rightarrow \alpha[n] <_G \alpha[n+1]$.

Beweis: (a) Beweis durch Induktion nach $\min\{n \mid \gamma \in C_0^n(\epsilon_{\Omega_\omega+1})\}$:
Falls $\gamma = \Omega_{u+1}$, folgt $\gamma[\alpha] = \alpha <_G \beta = \gamma[\beta]$.
Falls $\gamma =_{NF} \gamma_1 + \gamma_2 \quad \gamma_2 \in P \quad \gamma_1 \neq 0$, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung und Lemma 10.3(b).
Falls $\gamma = \psi_v(\gamma_1), \quad \gamma_1 \in C_v(\gamma_1) \cap C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}), \quad dom(\gamma_1) = \mathrm{T}_u$ mit $u < v$, folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung und Lemma 10.3(c).
(b) Sei zunächst $\alpha \in P$.
Falls $\alpha = \psi_\omega 0$, folgt $\alpha[n] = \psi_{n+1}0 = \psi_{n+2}0[\Omega_{n+1}] <_G \psi_{n+2}0 = \alpha[n+1]$.
Falls $\alpha = \psi_s b$ mit $dom(b) = \{0\}$, folgt $\alpha[n] = \psi_s b[0]\cdot(n+1) <_G \psi_s b[0]\cdot(n+2) = \alpha[n+1]$.
Falls $\alpha = \psi_s \beta$ mit $dom(\beta) = T_u$ und $u \geq s$, gilt $\alpha[n] = \psi_s\beta[\zeta_n]$ mit $\zeta_0 := \psi_u 0$ und $\zeta_{n+1} := \psi_u\beta[\zeta_n]$.
Durch Induktion nach n zeigen wir $\zeta_n <_G \zeta_{n+1}$:
Falls $n = 0$, folgt $\beta[\psi_u 0] \neq 0 \Rightarrow 0 <_G \beta[\psi_u 0] \overset{10.3(c)}{\Rightarrow} \zeta_0 = \psi_u 0 <_G \psi_u\beta[\psi_u 0] = \zeta_1$.
Ansonsten folgt nach der Induktionsvoraussetzung $\zeta_n <_G \zeta_{n+1}$, nach (a) $\beta[\zeta_n] <_G \beta[\zeta_{n+1}]$ und nach Lemma 10.3(c) $\zeta_{n+1} = \psi_u(\beta[\zeta_n]) <_G \psi_u(\beta[\zeta_{n+1}]) = \zeta_{n+2}$.
Aus $\zeta_n <_G \zeta_{n+1}$ folgt mit (a) und 10.3(c) $\alpha[n] = \psi_s(\beta[\zeta_n]) <_G \psi_s(\beta[\zeta_{n+1}]) = \alpha[n+1]$.
Falls $\alpha \notin P$, $\alpha =_{NF} \beta + \gamma$ mit $\gamma \in P$, folgt aus dem Beweis für $\alpha \in P$ und Lemma 10.3(b) $\alpha[n] = \beta + \gamma[n] <_G \beta + \gamma[n+1] = \alpha[n+1]$.

Lemma 10.5
$\alpha \in C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \cap Lim$ $\gamma \in dom(\alpha) \cap C_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ $\alpha[\gamma] < \beta \leq \alpha[\gamma+1]$
$\Rightarrow \alpha[\gamma] <_G \beta$.

Beweis durch Induktion nach α:
Sei $\alpha[\gamma] < \beta \leq \alpha[\gamma+1]$.
Da nach Lemma 10.4 $\alpha[\gamma] <_G \alpha[\gamma+1]$, existiert ein δ mit $\alpha[\gamma] \leq_G \delta^- < \beta \leq \delta \leq_G \alpha[\gamma+1]$.
Falls $\beta = \delta$, ist die Behauptung klar.
Falls $\beta < \delta$, folgt $\delta \in Lim$ und es gibt $\xi \in dom(\delta)$ mit $\delta[\xi] \leq \beta < \delta[\xi+1]$. $\delta^- = \delta[j]$, wobei $j := 0$, falls $dom(\delta) = \mathbb{N}$, und $j := \Omega_u$, falls $dom(\delta) = T_u$. Da $\delta^- < \beta < \delta[\xi+1]$, folgt $j \leq \xi$, nach Lemma 10.3(a) $j \leq_G \xi$ und nach Lemma 10.4(a) $\delta^- = \delta[j] \leq_G \delta[\xi]$. Da weiter nach Induktionsvoraussetzung $\delta[\xi] \leq_G \beta$ gilt, folgt $\alpha[\gamma] \leq_G \delta^- \leq_G \beta$. Da $\beta \neq \alpha[\gamma]$, folgt $\alpha[\gamma] <_G \beta$.

Satz 10.6
$(\psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}), \cdot[\cdot])$ *erfüllt die Bachmannbedingung.*

Beweis:
Bemerkung 10.2 und Lemma 10.5.

Lemma 10.7
Seien $\alpha, \beta, \gamma, \rho < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
(a) $\alpha <_k \beta \;\Rightarrow\; \omega^\alpha <_{k+1} \omega^\beta$.
(b) $\phi_{\rho+1}\gamma \leq \alpha <_k \beta < \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$
$\quad\Rightarrow \phi_\rho\alpha <_{k+1} \phi_\rho\beta$.
(c) $\epsilon_\nu \leq \alpha <_k \beta < \epsilon_{\nu+1} \Rightarrow \omega^\alpha <_k \omega^\beta$.
(d) $\epsilon_\nu \leq \alpha <_k \beta < \epsilon_{\nu+1} \Rightarrow \phi_\rho\omega^\alpha <_k \phi_\rho\omega^\beta$.

Beweis
Beweis von (a) - (d) durch transfinite Induktion nach β.
Es genügt, jeweils den Fall $\alpha <_k^1 \beta$ zu betrachten, die allgemeine Behauptung folgt dann immer aus dem Fall $\alpha <_k^1 \beta$ mit der Induktionsvoraussetzung.
(a) Falls $\beta = \alpha + 1$, folgt $\omega^\beta[0] = \omega^\alpha$.
Sei nun $\beta \in Lim$, $\alpha = \beta[l]$ mit $l \leq k$.
Es gilt $\exists s \in \{-1, 0, 1\} \forall j > 0 (\omega^\beta[j] = \omega^{\beta[j+s]})$.
Falls $l = 0$, folgt $\omega^\beta[1] = \omega^{\beta[k]}$ für ein $k \in \{0, 1, 2\}$, und, da $\beta[l] \leq_0 \beta[k]$, folgt nach Induktionsvoraussetzung $\omega^\alpha = \omega^{\beta[l]} \leq_1 \omega^{\beta[k]} = \omega^\beta[1] <_1 \omega^\beta$.
Falls $l = s = 1$, folgt aus $\beta[1] <_0 \beta[2]$ mit Induktionsvoraussetzung $\omega^\alpha = \omega^{\beta[1]} <_1 \omega^{\beta[2]} = \omega^\beta[1] <_1 \omega^\beta$.
Ansonsten folgt $\omega^\alpha = \omega^{\beta[l]} = \omega^\beta[l-s] <_{k+1} \omega^\beta$.

(b) Es gilt $\beta \neq \phi_\rho\beta$

Falls $\beta = \alpha + 1$, folgt $\phi_\rho\alpha = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\alpha_1 + {\Omega_1}^{\rho}\cdot\alpha_2) \overset{10.2 \text{ u. } 10.3}{<_0}$ $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\alpha_1 + {\Omega_1}^{\rho}\cdot\alpha_2 + {\Omega_1}^{\rho}) = \phi_\rho\beta$. (Hierbei sollen $(\rho, \alpha, \rho_1, \alpha_1, \alpha_2)$ den Ordinalzahlen $(\alpha, \beta, \rho, \beta_1, \beta_2)$ in Defnition 6.3 entsprechen).
Falls $\alpha = \beta[l]$ mit $l > 0$, $\beta \in Lim$, folgt $(\phi_\rho\beta)[m] = \phi_\rho(\beta[l]) = \phi_\rho\alpha$ für ein $m \in \{l-1, l, l+1\}$.
Falls $\alpha = \beta[0]$ mit $\beta \in Lim$, gilt $(\phi_\rho\beta)[1] = \phi_\rho(\beta[l])$ für ein $l \in \{0, 1, 2\}$, und es folgt aus der Induktionsvoraussetzung und $\beta[0] \leq_0 \beta[l]$, $\phi_\rho\alpha = \phi_\rho(\beta[0]) \leq_0 \phi_\rho(\beta[l]) = (\phi_\rho\beta)[1] <_1 \rho_\rho\beta$.

(c),(d): In (d) kann o.E. $\rho \neq 0$ angenommen werden, die Behauptung für $\rho = 0$ folgt durch zweimalige Anwendung von (c).
Falls $\beta = \alpha + 1$, folgt wegen $0 < \epsilon_\nu \leq \alpha$ $\beta > 1$, weiter $\omega^\beta[0] = \omega^\alpha$ und $(\phi_\rho\omega^\beta)[0] = \phi_\rho(\omega^\beta[0]_H) = \phi_\rho\omega^\alpha$,
bzw. ,falls $\beta = \omega^{\phi_{\rho+1}\gamma+1}$ für ein γ, $(\phi_\rho\omega^\beta)[0] = \phi_\rho(\omega^\beta[1]) = \phi_\rho(\omega^\alpha + \omega^\alpha) = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\beta_1 + {\Omega_1}^{\rho}\cdot(\omega^\alpha + \omega^\alpha)) >_0 \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\beta_1 + {\Omega_1}^{\rho}\cdot\omega^\alpha) = \phi_\rho\omega^\alpha$ (wobei $\psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1) \leq \rho < \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot(\rho_1 + 1))$,
$\beta = \psi_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\beta_1)$, ${\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\beta_1 \in C_0({\Omega_1}^{\Omega_1}\cdot\rho_1 + {\Omega_1}^{\rho+1}\cdot\beta_1)$.
Falls $\beta \in Lim$ und $\beta[l] = \alpha$ für ein $l \leq k$, gilt $\omega^\beta[l] = \omega^{\beta[l]} = \omega^\alpha$ oder $\omega^\beta[l] = \omega^{\beta[l+1]} >_0 \omega^\alpha$, letzteres wegen $\beta[l] <_0 \beta[l+1]$ und der Induktionsvoraussetzung.
Weiter gilt dann $(\phi_\rho\omega^\beta)[l] = \phi_\rho(\omega^\beta[l]_H) = \phi_\rho\omega^{\beta[l]} = \phi_\rho\omega^\alpha$ oder $(\phi_\rho\omega^\beta)[l] = \phi_\rho(\omega^\beta[l+1]) = \phi_\rho\omega^{\beta[l+s]} >_0 \phi_\rho\omega^\alpha$ mit $s \in \{1, 2\}$, letzteres wegen $\beta[l+s] >_0 \beta[l] = \alpha$ und der Induktionsvoraussetzung.

Folgerung 10.8
Sei $\delta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
(a) $f : \omega^{\delta+1} \to \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}),\ \alpha \mapsto \omega^{\omega^\delta+\alpha}$ ist gut wachsend.
(b) $f : \omega^{\delta+1} \to \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}),\ \alpha \mapsto \phi_\rho(\omega^{\omega^\delta+\alpha})$ ist gut wachsend.

Beweis:
Gilt $\alpha <_k \beta < \omega^{\delta+1}$. Dann folgt $\epsilon_\nu \leq \omega^\delta + \alpha <_k \omega^\delta + \beta < \epsilon_{\nu+1}$, falls $\epsilon_\nu \leq \omega^\delta < \epsilon_{\nu+1}$. Dann folgt aber nach Lemma 10.7(c), (d) in (a) und (b) $f(\alpha) <_k f(\beta)$. Nach Lemma 8.13 folgt die Behauptung.

Lemma 10.9
$\alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow n(\omega^\alpha) \geq n(\alpha)$.

Beweis durch transinite Induktion nach α:
Falls α Epsilonzahl, ist die Behauptung klar.
Ansonsten folgt $\omega^\alpha[0] = \omega^{\alpha[i]}$ für ein $i \in \{0,1\}$.
Da $\alpha[0] \leq_0 \alpha[i]$, folgt $n(\omega^\alpha) = n(\omega^\alpha[0]) + 1 = n(\omega^{\alpha[i]}) + 1 \overset{IV}{\geq} n(\alpha[i]) + 1 \geq n(\alpha[0]) + 1 = n(\alpha)$.

Lemma 10.10
$\alpha < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow F_{\omega^\alpha}(n) \geq F_\alpha(n)$.

Beweis durch transinite Induktion nach α:
Falls $n = 0$, folgt $F_{\omega^\alpha}(n) = 1 = F_\alpha(n)$. Sei also $n \neq 0$.
Falls α Epsilonzahl, ist die Behauptung klar.
Falls α Limeszahl, folgt $\omega^\alpha[n] = \omega^{\alpha[l]}$ für ein $l \in \{n, n+1\}$.
Da $\alpha[l] \geq_0 \alpha[n]$, folgt $F_{\omega^\alpha}(n) = F_{\omega^\alpha[n]}(n) = F_{\omega^{\alpha[l]}}(n) \overset{IV}{\geq} F_{\alpha[l]}(n) \geq F_{\alpha[n]}(n) = F_\alpha(n)$.
Falls α Nachfolgerzahl, folgt $F_{\omega^\alpha}(n) = F_{\omega^{\alpha[0]}\cdot(n+1)}(n) \overset{\omega^{\alpha[0]}\cdot(n+1) \geq_1 \omega^\alpha[0]+1}{\geq} F_{\omega^{\alpha[0]}+1}(n) = F^{n+1}_{\omega^{\alpha[0]}}(n) \overset{IV}{\geq} F^{n+1}_{\alpha[0]}(n) = F_{\alpha[0]+1}(n) = F_\alpha(n)$.

Lemma 10.11
$\omega \leq \gamma < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow \omega \leq_0 \gamma$.

Beweis:
Falls $\gamma \in P$, folgt $\gamma = \psi_0\rho$ mit $1 \leq \rho \in C_0(\rho)$. Dann folgt nach Lemma 10.3(a) $1 \leq_G \rho$ also nach 10.3(c) $\omega = \psi_0(1) \leq_G \psi_0(\rho)$, mit Bemerkung 10.2 also die Behauptung.
Falls $\gamma \notin P$, folgt $\gamma =_{NF} \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ mit $0 \neq \gamma_i \in P$. Es folgt $\omega \leq \gamma_1$, also, da $\gamma_1 \in P$, $\omega \leq_0 \gamma_1 <_0 \gamma$.

Definition 10.12
Seien $\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
$\alpha <^1_{k,H} \beta :\Leftrightarrow \beta[i]_H = \alpha$ für ein $i \leq k$ (vgl. Definition 7.2).
$<_{k,H}$ sei die transitive Hülle von $<^1_{k,H}$.
$\alpha \leq_{k,H} \beta :\Leftrightarrow (\alpha = \beta \ \vee \ \alpha <_{k,H} \beta)$, $\beta >_{k,H} \alpha :\Leftrightarrow \alpha <_{k,H} \beta$, $\beta \geq_{k,H} \alpha :\Leftrightarrow \alpha \leq_{k,H} \beta$.

Lemma 10.13
$\alpha <_k \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \ \Rightarrow \ \alpha <_{k+1,H} \beta$.

Beweis: durch Induktion nach β.
Es genügt, den Fall $\alpha <^1_k \beta$ zu betrachten, der allgemeine Fall folgt dann jeweils mit der Induktionsvoraussetzung.
Falls $\beta = \alpha + 1$, folgt $\beta[0]_H = \alpha$.
Sei $\beta \in Lim$, $\beta[i] = \alpha$ mit $i \leq k$. Dann folgt
$\exists s \in \{-1, 0, 1\} \forall j > 0 (\beta[j]_H = \beta[j + s])$.
Falls $i = 0$, folgt $\alpha = \beta[0] \leq_0 \beta[1 + s] = \beta[1]_H <_{1,H} \beta$, mit Induktionsvoraussetzung also $\alpha \leq_{1,H} \beta[1]_H <_{1,H} \beta$.
Falls $i = 1$ und $s = 1$, folgt $\alpha = \beta[1] <_1 \beta[2] = \beta[1]_H$, also mit Induktionsvoraussetzung $\alpha <_{2,H} \beta[1]_H <_{1,H} \beta$.
Ansonsten folgt $\alpha = \beta[i] = \beta[i - s]_H <_{k+1,H} \beta$.

Lemma 10.14
Seien $\rho, \rho_1, \gamma < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
$\rho <_{n,H} \rho_1 \Rightarrow \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1) <_n \phi_{\rho_1}(\gamma + 1)$.

Beweis: durch transfinite Induktion nach ρ_1, simultan für alle γ.
Sei zunächst $\rho <^1_{n,H} \rho_1$.
Falls $\rho_1 = 1,\ \rho = 0$, folgt $\phi_{\rho_1}(\gamma + 1)[0] = \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1)$.
Falls $\rho_1 = \rho + 1,\ \rho > 0$, folgt $\phi_{\rho_1}(\gamma + 1)[0] = \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + \omega)$. Weiter gilt $(\phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + \omega))[0] = \phi_\rho(((\phi_{\rho_1}\gamma) + \omega)[0]_H) = \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1)$.
Falls $\rho_1 = \omega$, folgt $\rho = k+1$ mit $k \leq n$. Gilt dann $k = 0$ folgt $\phi_{\rho_1}(\gamma + 1)[0] = \phi_2(\phi_{\rho_1}\gamma + 1) \overset{\text{Fall } \rho = 2}{>_0} \phi_1(\phi_2\phi_{\rho_1}\gamma + 1) = \phi_1(\phi_{\rho_1}\gamma + 1)$. Gilt aber $k > 0$ folgt $\phi_{\rho_1}(\gamma + 1)[k - 1] = \phi_{k+1}(\phi_{\rho_1}\gamma + 1)$.
Falls $\omega \neq \rho_1 \in Lim$, $\rho_1[k]_H = \rho$ für ein $k \leq n$, folgt
$\phi_{\rho_1}(\gamma + 1)[k] = \phi_{\rho_1[k]_H}((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1) = \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1)$.
Gilt nicht $\rho <^1_{n,H} \rho_1$ so existiert ein ρ_2 mit $\rho <_{n,H} \rho_2 <^1_{n,H} \rho_1$, mit obigem Fall und der Induktionsvoraussetzung folgt also $\phi_{\rho_1}(\gamma + 1) >_n \phi_{\rho_2}((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1) >_n \phi_\rho(\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}\gamma) + 1) = \phi_\rho((\phi_{\rho_1}\gamma) + 1)$.

Lemma 10.15
$\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow (\phi_\alpha\beta)\cdot(n + 1) <_n \phi_\alpha(\beta + 1)$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α:
Falls $\alpha = 0$, gilt $\phi_\alpha(\beta + 1)[n] = \phi_\alpha\beta\cdot(n + 1)$.
Falls $\alpha = 1$, gilt $\phi_\alpha(\beta + 1)[0] = \phi_0(\phi_1\beta + 1) \overset{\text{Fall } \alpha = 0}{>_n} (\phi_0\phi_1\beta)\cdot(n + 1) = \phi_1\beta\cdot(n + 1)$.

Falls $\alpha = \delta+1 > 1$, gilt $\phi_\alpha(\beta+1)[0] = \phi_\delta(\phi_\alpha\beta+\omega)$. Weiter $\phi_\delta(\phi_\alpha\beta+\omega)[0] = \phi_\delta((\phi_\alpha\beta+\omega)[0]_H) = \phi_\delta(\phi_\alpha\beta+1) \overset{IV}{>}_n (\phi_\delta(\phi_\alpha\beta))\cdot(n+1) = \phi_\alpha\beta\cdot(n+1)$.
Falls $\alpha = \omega$, folgt $(\phi_\alpha(\beta+1))[0] = \phi_2((\phi_\alpha\beta)+1) \overset{IV}{>} (\phi_2\phi_\alpha\beta)\cdot(n+1) = (\phi_\alpha\beta)\cdot(n+1)$.
Gilt $\omega \neq \alpha \in Lim$ so folgt
$\phi_\alpha(\beta+1)[0] = \phi_{(\alpha[0]_H)}((\phi_\alpha\beta)+1) \overset{IV}{>}_n (\phi_{\alpha[0]_H}\phi_\alpha\beta)\cdot(n+1) = \phi_\alpha\beta\cdot(n+1)$.

Folgerung 10.16
$\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow \phi_\alpha\beta + 1 <_1 \phi_\alpha(\beta+1)$.

Beweis:
$\phi_\alpha\beta + 1 \leq_0 \phi_\alpha\beta + \phi_\alpha\beta \overset{10.15}{<_1} \phi_\alpha(\beta+1)$.

Lemma 10.17
Seien $\gamma, \rho_2, \rho < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
(a) $\phi_\rho^{l+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+1) <_l \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$.
(b) $\rho_2 <_n \rho_1 \Rightarrow \phi_{\rho_2}^{l+1}(\phi_{\rho_1}\gamma+1) <_{\max\{n+2,l\}} \phi_{\rho_1}(\gamma+1)$.

Beweis:
(a) Falls $\rho = 0$, gilt $\phi_{\rho+1}(\gamma+1)[l] = \phi_\rho^{l+1}((\phi_{\rho+1}\gamma)+1)$.
Falls $\rho > 0$, gilt $\phi_{\rho+1}(\gamma+1)[l] = \phi_\rho^{l+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+\omega))$
Durch Induktion nach k zeigen wir $\phi_\rho^{k+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+1) <_k \phi_\rho^{k+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+\omega)$:
Im Fall $k=0$ gilt
$\phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma+\omega)[0] = \phi_\rho((\phi_{\rho+1}\gamma+\omega)[0]_H) = \phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma+1)$.
Im Fall $k = k'+1$ folgt nach Induktionsvoraussetzung
$\phi_{\rho+1}(\gamma) < \phi_\rho^{k'+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+1) <_{k'} \phi_\rho^{k'+1}(\phi_{\rho+1}\gamma+\omega) < \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$,
mit Lemma 10.7(b) also die Behauptung.
(b) Falls $\rho_1 = \rho_2+1$, ist dies Behauptung (a).
Sei also $\rho_2+1 < \rho_1$. Dann folgt $\rho_2+1 <_{n+1} \rho_1 \overset{10.13}{\Rightarrow} \rho_2+1 \leq_{n+2,H} \rho_1$. Es folgt
$\phi_{\rho_2}^{l+1}(\phi_{\rho_1}\gamma+1) = \phi_{\rho_2}^{l+1}((\phi_{\rho_2+1}\phi_{\rho_1}\gamma)+1) \overset{(a)}{<_l} \phi_{\rho_2+1}(\phi_{\rho_1}\gamma+1) \overset{10.14}{<_{n+2}} \phi_{\rho_1}(\gamma+1)$.

Folgerung 10.18
Seien $\rho, \gamma < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
$\phi_\rho((\phi_{\rho+1}\gamma)\cdot(n+1)) <_{n+1} \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$.

Beweis:
$\phi_\rho\phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma+1) \overset{10.17(a)}{<_1} \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$.
Da $\phi_{\rho+1}\gamma \leq \phi_{\rho+1}\gamma\cdot(n+1) = \phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma)\cdot(n+1) \overset{10.15}{<_n} \phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma+1)$
$< \phi_{\rho+1}(\gamma+1)$, folgt mit Lemma 10.7(b) $\phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma\cdot(n+1)) <_{n+1}$
$\phi_\rho\phi_\rho(\phi_{\rho+1}\gamma+1)$.

Lemma 10.19
Seien $\rho_1, \rho_2, \delta, \widetilde{\alpha} < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$.
Sei $\rho_2 <_n \rho_1 \Rightarrow \phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3}) <_{\max\{n+2,4\}} \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1})$.

Beweis:
1) Behauptung: $\phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3}) <_4 \phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$ oder
$<_4 \phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.

Beweis: Fall 1: $\rho_2 = 0$.
$\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3 = \omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})}\cdot 3 <_2 \omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1}$
$\Rightarrow \phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3}) \overset{10.7(a)}{<_4} \phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.
Fall 2: $\rho_2 > 0$:
$\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3 \overset{\text{wie in Fall 1}}{<_2} \omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1}$.
$0 <_0 \rho_2$, also nach Lemma 10.13 $0 <_{1,H} \rho_2$, also folgt nach Lemma 10.14
$\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1} = \phi_0(\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}))+1) <_2 \phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.
Mit Lemma 10.7(a) folgt $\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3} <_3 \omega^{\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)} = \phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.
Sei $\phi_{\rho_2+1}\gamma \leq \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}) < \phi_{\rho_2+1}(\gamma+1)$. Dann gilt $\phi_{\rho_2+1}\gamma < \omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3} <_3 \phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) < \phi_{\rho_2+1}(\gamma+1)$. Mit Lemma 10.7(b) folgt $\phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3})$
$<_4 \phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.

2) Nach Lemma 10.17(b) gilt
$\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) <_{n+2} \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1)$ und
$\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}\phi_{\rho_2}(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) <_{\max\{n+2,3\}} \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1)$.

3) $\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1 <_0 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}\cdot 2 <_1 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1}$, und, falls $\phi_{\rho_1+1}\gamma \leq \delta+\widetilde{\alpha} < \phi_{\rho_1+1}(\gamma+1)$,
folgt $\phi_{\rho_1+1}\gamma \leq \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1 <_1 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1} < \phi_{\rho_1+1}(\gamma+1)$,
also mit Lemma 10.7 $\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1) <_2 \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1})$.

Lemma 10.20
$\alpha, \beta < \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1}) \Rightarrow F_\beta(n) \leq F_{\phi_\alpha\beta}(n+1)$.

Beweis durch transfinite Induktion nach β:
Falls $\beta = 0$, folgt die Behauptung aus den Lemmata 8.5(b) und 8.7(c).
Falls $\beta = \phi_\alpha\beta$, ist die Behauptung trivial.
Falls $\beta = \gamma + 1$ und $n \neq 0$, folgt

$$\begin{aligned} F_{\gamma+1}(n) &= F_\gamma^{n+1}(n) \\ &\leq (F_{\phi_\alpha\gamma}(\cdot + 1))^{n+1}(n) && \text{[nach Induktionsvoraussetzung]} \\ &\leq F^{n+1}_{\phi_\alpha\gamma+1}(n) \\ &= F_{\phi_\alpha\gamma+2}(n) \\ &\leq F_{\phi_\alpha\gamma+2}(n+1) \\ &\leq F_{\phi_\alpha(\gamma+1)}(n+1). \end{aligned}$$

[denn $\phi_\alpha\gamma + 2 <_2 \phi_\alpha\gamma + \phi_\alpha\gamma \overset{10.15}{<_1} \phi_\alpha(\gamma+1)$
bzw., falls $\alpha = \gamma = 0$, $\quad \phi_\alpha\gamma + 2 = 3 <_2 \omega = \phi_\alpha(\gamma+1)$.]

Falls $\beta = \gamma + 1$ und $n = 0$, gilt:

$$F_{\gamma+1}(0) = F_\gamma(0) \leq F_{\phi_\alpha\gamma}(1) \leq F_{\phi_\alpha(\gamma+1)}(1). \qquad \text{[da } \phi_\alpha\gamma <_1 \phi_\alpha(\gamma+1)\text{]}$$

Falls $\beta \in Lim$, $\beta \neq \phi_\alpha\beta$, folgt $\phi_\alpha\beta[n+1] = \phi_\alpha(\beta[n+s])$ für ein $s \in \{0, 1, 2\}$.
Wegen $\beta[n] \leq_0 \beta[n+s]$ folgt $F_\beta(n) = F_{\beta[n]}(n) \leq F_{\beta[n+s]}(n)$
$\overset{IV}{\leq} F_{\phi_\alpha(\beta[n+s])}(n+1) = F_{(\phi_\alpha\beta)[n+1]}(n+1) = F_{\phi_\alpha\beta}(n+1)$.

Teil II

Beweistheoretische Analyse

Kapitel 11

Schnittelimination und Kollabierung im Beweiskalkül (Σ)

Mit diesem Kapitel beginnt der beweistheoretische Teil der Arbeit. In Kapitel 11 wird das halbformale System (Σ) eingeführt, das Kollabierungslemma bewiesen und Schnittelimination durchgeführt. Damit können für in (Σ) bewiesene Π_2^0-Sätze sofort Schranken angegeben werden. Um für in anderen Theorien bewiesene Π_2^0-Sätze Schranken zu finden, müssen diese dann in (Σ) interpretiert werden, was in den Kapiteln 12 - 14 für die Peano-Arithmetik und Δ_1^1-Analysis geleistet wird.

Definition 11.1
Gegeben sei eine Menge von Formeln. Jeder Formel A sei eine Indexmenge I, Formeln $(A_\iota)_{\iota\in I}$ und ein Symbol $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$ oder $\bigvee\!\!\!\bigvee$ zugeordnet, im Zeichen $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$ oder $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota$, wobei jedem $\iota \in I$ eine natürliche Zahl $\nu(\iota)$ zugeordnet wird. Jeder Formel A sei die negierte Formel $\neg A$ zugeordnet, so daß gilt:
$A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \neg A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota$,
$A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \neg A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$,
sowie $\neg\neg A \equiv A$.
Für jede Formel A sei der Rang von A, eine Ordinalzahl $|A|$, definiert, so daß gilt: $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$ oder $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \forall \iota \in I(|A_\iota| < |A|)$ und weiter $|A| = |\neg A|$.

$n(A) := n(|A|)$.
Wenn nicht anders angegeben, sei in den konkreten Beispielen, falls $\iota = \alpha$ *Ordinalzahl (auch natürliche Zahl),* $\nu(\alpha) := n(\alpha)$, *und, falls* $\iota = F$ *Formel oder Prädikator,* $\nu(F) := n(|F|) = n(F)$.

Die Vorstellung dabei ist, daß alle Formeln Formeln ohne freie Variable sind, und für wahre Primformeln $A \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\emptyset} A_\iota$ *sowie für falsche Primformeln* $A \stackrel{\triangle}{=} \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in\emptyset} A_\iota$ *gilt. Für Formeln* $A = A_0 \wedge A_1$ *gilt dann* $A \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\{0,1\}} A_\iota$, *allquantifizierte Formeln sind dann* $\bigwedge\!\!\!\bigwedge$*-Formeln mit unendlichem* I. *Analog wird* $A_0 \vee A_1$ *und* $\exists x A(x)$ *interpretiert.*

Definition 11.2
Induktive Definition von $\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma \quad (n \geq 1)$:

($\bigwedge\!\!\!\bigwedge$) $\quad A \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota,\ A \in \Gamma \wedge \forall\!\!\!\forall\iota \in I(\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n\cup\nu(\iota)}\Gamma, A_\iota) \Rightarrow \Sigma\vdash_\rho^{\alpha+1,n}\Gamma.$

($\bigvee\!\!\!\bigvee$) $\quad A \stackrel{\triangle}{=} \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota,\ A \in \Gamma \wedge\ \exists\!\!\!\exists\iota_0 \in I(\nu(\iota_0) < F_\alpha(n),\ n(A_{\iota_0}) \leq n(\alpha) \neq 0,$
$\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma, A_{\iota_0}) \Rightarrow \Sigma\vdash_\rho^{\alpha+1,n}\Gamma.$

(Cut) $\quad \Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma, A$ *und* $\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma, \neg A$ *mit* $|A| < \rho,\ n(A) \leq n(\alpha) \Rightarrow$
$\Sigma\vdash_\rho^{\alpha+1,n}\Gamma.$

($\triangleleft$) $\quad \Sigma\vdash_\rho^{\beta,k}\Gamma,\ \beta <_k \alpha,\ k < F_\alpha(n),\ n \geq 1\ \Rightarrow \Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma.$

Lemma 11.3
Abschwächungslemma:
$\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,n}\Gamma$ *mit* $n \leq m,\ \rho \leq \widetilde{\rho},\ \Gamma \subset \widetilde{\Gamma} \Rightarrow \Sigma\vdash_{\widetilde{\rho}}^{\alpha,m}\widetilde{\Gamma}.$

Beweis durch transfinite Induktion nach α: klar

Im Folgenden wird das Abschwächungslemma oft angewendet, ohne explizit erwähnt zu werden.

Lemma 11.4
Regel $(\widetilde{<})$:
Gilt $\Sigma\vdash_\rho^{\alpha,k}\Gamma$ *mit* $\alpha \widetilde{<}_n \beta$, *und* $k < F_\beta(n)$. *Dann gilt* $\Sigma\vdash_\rho^{\beta,n}\Gamma$.

Beweis: Es gilt $\alpha \widetilde{<}_n \beta$, also gibt es γ_i, m_i, so daß $\alpha <_{m_1} \gamma_1 <_{m_2} \gamma_2 <_{m_3} \cdots <_{m_j} \gamma_j = \beta$ wobei $m_i < F_{\gamma_i}(m_{i+1}),\ m_j < F_\beta(n)$. Wir können o.E. annehmen, daß $m_i = F_{\gamma_i}(m_{i+1}) - 1$ und $m_j = F_{\gamma_j}(n) - 1$. Daraus folgt dann $F_\beta(n) - 1 = m_j \leq m_{j-1} \leq \cdots \leq m_1$, also folgt aus $\Sigma\vdash^{\alpha,k}_{\rho}\Gamma$ mit dem Abschwächungslemma 11.3 $\Sigma\vdash^{\alpha,m_1}_{\rho}\Gamma,\ \overset{(\lhd)}{\Rightarrow}\Sigma\vdash^{\gamma_1,m_2}_{\rho}\Gamma,\ \overset{(\lhd)}{\Rightarrow}\cdots\overset{(\lhd)}{\Rightarrow}\Sigma\vdash^{\gamma_j,n}_{\rho}\Gamma$, d.h. $\Sigma\vdash^{\beta,n}_{\rho}\Gamma$, die Behauptung.

Definition 11.5
Definition von $\models A[m/n]$ *durch Induktion nach* $|A|$*.*
$A \triangleq \bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$ *dann* $\models A[m/n] :\Leftrightarrow \forall\iota\in I(\nu(\iota)\leq m \rightarrow \models A_\iota[m/n])$*.*
$A \triangleq \bigvee_{\iota\in I} A_\iota$ *dann* $\models A[m/n] :\Leftrightarrow \exists\iota\in I(\nu(\iota)\leq n \wedge \models A_\iota[m/n])$*.*
$\models\Gamma[m/n] :\Leftrightarrow \exists A\in\Gamma(\models A[m/n])$*.*

Lemma 11.6
Kollabierungslemma.
$\Sigma\vdash^{\alpha,n}_{0}\Gamma \Rightarrow \models\Gamma[n/F_{\alpha+1}(n)]$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α:
Fallunterscheidung nach der letzten Schlußregel.
($\bigwedge$) Sei $\alpha = \widetilde{\alpha}+1$, $A\triangleq\bigwedge_{\iota\in I}A_\iota$, $A\in\Gamma$ und $\forall\iota\in I\ (\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},\ n\cup\nu(\iota)}_{0}\Gamma, A_\iota)$. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung $\forall\iota\in I(\models\Gamma, A_\iota[n\cup\nu(\iota)/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n\cup\nu(\iota)]$, also folgt $\forall\iota\in I(\nu(\iota)\leq n\rightarrow\ \models\Gamma, A_\iota[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)])$. Gilt nun $\forall\iota\in I(\nu(\iota)\leq n\rightarrow\ \models A_\iota[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)])$, so folgt $\models A[n/F_\alpha(n)]$, also $\models\Gamma[n/F_{\alpha+1}(n)]$. Ansonsten gilt $\exists\iota\in I(\nu(\iota)\leq n\wedge\ \models\Gamma[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)])$, d.h. $\models\Gamma[n/F_{\alpha+1}(n)]$.
($\bigvee$) Sei $\alpha=\widetilde{\alpha}+1$, $A\triangleq\bigvee_{\iota\in I}A_\iota$, $A\in\Gamma$, $\iota_0\in I$ mit $\nu(\iota_0)<F_{\widetilde{\alpha}}(n)$ und $n(A_{\iota_0})\leq n(\widetilde{\alpha})\neq 0$, und gelte $\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},n}_{0}\Gamma, A_{\iota_0}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann $\models\Gamma, A_{\iota_0}[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)]$. Gilt $\models A_{\iota_0}[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)]$ folgt $\models A[n/F_{\alpha+1}(n)]$. Ansonsten folgt $\models\Gamma[n/F_{\widetilde{\alpha}+1}(n)]$, also wieder die Behauptung.
($\lhd$) Gelte $\Sigma\vdash^{\beta,k}_{0}\Gamma$ mit $\beta<_k\alpha$, $k<F_\alpha(n)$ und $1\leq n$. Nach dem Abschwächungslemma können wir o. E. annehmen $k=F_\alpha(n)-1\geq n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\models\Gamma[k, F_{\beta+1}(k)]$. Da $\beta<_k\alpha$ folgt $\beta+1\leq_{k+1}\alpha$, also $F_{\beta+1}(k)\leq F_{\beta+1}(k+1)\leq F_\alpha(k+1) = F_\alpha(F_\alpha(n))\leq F_{\alpha+1}(n)$, also $\models\Gamma[n, F_{\alpha+1}(n)]$.

Lemma 11.7
($\bigwedge$)*-Inversionslemma.*
$A\triangleq\bigwedge_{\iota\in I}A_\iota$, $\Sigma\vdash^{\alpha,n}_{\rho}\Gamma, A\Rightarrow\forall\iota\in I(\Sigma\vdash^{\alpha,n\cup\nu(\iota)}_{\rho}\Gamma, A_\iota)$.

Beweis durch transfinite Induktion nach α:
Fallunterscheidung nach dem letzten Beweisschluß.
($\bigwedge$) Sei $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, $B \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge_{\widetilde{\iota} \in \widetilde{I}} B_{\widetilde{\iota}}$, $B \in \Gamma, A$ und
$\forall \widetilde{\iota} \in \widetilde{I} (\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\widetilde{\iota})}_{\rho} \Gamma, A, B_{\widetilde{\iota}}$. Falls $A \equiv B$, folgt nach Induktionsvoraussetzung $\forall \iota \in I (\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, A_{\iota})$, und mit ($\triangleleft$) die Behauptung. Ansonsten folgt nach Induktionsvoraussetzung $\forall \iota \in I \forall \widetilde{\iota} \in \widetilde{I} (\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\widetilde{\iota}) \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, A_{\iota}, B_{\widetilde{\iota}})$, und mit Anwendung der ($\bigwedge$)-Regel auf B die Behauptung.
($\bigvee$) Sei $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, $B \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\widetilde{\iota} \in \widetilde{I}} B_{\widetilde{\iota}}$, $B \in \Gamma$, $\iota_0 \in \widetilde{I}$ mit $\nu(\iota_0) < F_{\widetilde{\alpha}}(n)$ und $n(B_{\iota_0}) \leq n(\widetilde{\alpha}) \neq 0$, und gelte $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n}_{\rho} \Gamma, B_{\iota_0}, A$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, B_{\iota_0}, A_{\iota}$ und mit einer einfachen Anwendung von ($\bigvee$) folgt die Behauptung.
(Cut) Sei $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n}_{\rho} \Gamma, B, A$ und $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n}_{\rho} \Gamma, \neg B, A$ mit $|B| < \rho$ und $n(B) \leq n(\widetilde{\alpha})$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, B, A_{\iota}$ und $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, \neg B, A_{\iota}$ und mit einem (Cut)-Schluß folgt die Behauptung.
($\triangleleft$) $\Sigma \vdash^{\beta, k}_{\rho} \Gamma, A$ mit $\beta <_k \alpha$ und $k < F_{\alpha}(n)$, $1 \leq n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\Sigma \vdash^{\beta, k \cup \nu(\iota)}_{\rho} \Gamma, A_{\iota}$. Da $\beta <_{k \cup \nu(\iota)} \alpha$ und $k \cup \nu(\iota) < F_{\alpha}(n \cup \nu(\iota))$, folgt die Behauptung.

Lemma 11.8
($\bigvee$)*-Inversionslemma.*
Gelte $\Sigma \vdash^{\alpha, n}_{\rho} \Gamma, A$ *wobei* $A \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\iota \in I} A_{\iota}$ *und* I *endlich ist,* $I = \{\iota_1, \ldots, \iota_k\}$.
Dann folgt $\vdash^{\alpha, n}_{\rho} \Gamma, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_k}$.

Beweis: durch transfinite Induktion nach α:
Falls $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$ und $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n}_{\rho} \Gamma, A, A_{\iota_0}$, folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\Sigma \vdash^{\widetilde{\alpha}, n}_{\rho} \Gamma, A_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_k}$, und mit ($\triangleleft$) die Behauptung. .
Ansonsten folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung.

Lemma 11.9
Reduktionslemma:
Gelte $A \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\iota \in I} A_{\iota}$, $\alpha + \beta =_{NF} \alpha + \beta$, $|A| \leq \rho$. *Gelte* $\Sigma \vdash^{\alpha, n}_{\rho} \Gamma, \neg A$ *und* $\Sigma \vdash^{\beta, n}_{\rho} \Gamma, A$. *Dann folgt* $\Sigma \vdash^{\alpha + \beta, n}_{\rho} \Gamma$.

Beweis durch transfinite Induktion nach β:
Fallunterscheidung nach der letzten Beweisregel in $\vdash^{\beta,n}_{\rho}\Gamma, A$.
$(\bigwedge)$ $B \stackrel{\triangle}{=} \bigwedge_{\widetilde{\iota}\in\widetilde{I}} B_{\widetilde{\iota}}$, $B \in \Gamma$, $\beta = \widetilde{\beta}+1$ und $\forall\widetilde{\iota} \in \widetilde{I}(\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n\cup\nu(\widetilde{\iota})}_{\rho}\Gamma, A, B_{\widetilde{\iota}})$. Mit Abschwächungslemma 11.3 folgt $\Sigma\vdash^{\alpha,n\cup\nu(\widetilde{\iota})}_{\rho}\Gamma, \neg A, B_{\widetilde{\iota}}$ und mit der Induktionsvoraussetzung also $\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n\cup\nu(\widetilde{\iota})}_{\rho}\Gamma, B_{\widetilde{\iota}}$. Durch Anwendung von $(\bigwedge)$ folgt die Behauptung.
$(\bigvee)$, leichter Fall: $B \stackrel{\triangle}{=} \bigvee_{\widetilde{\iota}\in\widetilde{I}} B_{\widetilde{\iota}}$, $B \in \Gamma$, $\widetilde{\beta}+1 = \beta$, $\iota_0 \in \widetilde{I}$ mit $\nu(\iota_0) < F_{\widetilde{\beta}}(n)$ und $n(B_{\iota_0}) \leq n(\widetilde{\beta}) \neq 0$. Weiter gelte $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A, B_{\iota_0}$. Nach dem Abschwächungslemma 11.3 folgt $\Sigma\vdash^{\alpha,n}_{\rho}\Gamma, \neg A, B_{\iota_0}$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, B_{\iota_0}$. Da $\nu(\iota_0) < F_{\widetilde{\beta}}(n) \stackrel{9.1\,(a)}{\leq} F_{\alpha+\widetilde{\beta}}(n)$ und $n(B_{\iota_0}) \leq n(\widetilde{\beta}) \stackrel{9.1\,(c)}{\leq} n(\alpha+\widetilde{\beta}) \neq 0$, folgt mit einem $(\bigvee)$- Schluß die Behauptung.
$(\bigvee)$, Hauptfall: Sei $\beta = \widetilde{\beta}+1$, $\iota_0 \in I$ mit $\nu(\iota_0) < F_{\widetilde{\beta}}(n)$ und $n(A_{\iota_0}) \leq n(\widetilde{\beta}) \neq 0$, und gelte $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A, A_{\iota_0}$. Aus dem $(\bigwedge)$-Inversionslemma 11.7 folgt $\Sigma\vdash^{\alpha,n\cup\nu(\iota_0)}_{\rho}\Gamma, \neg A_{\iota_0}$. Da $\alpha <_0 \alpha+\widetilde{\beta}$ und $1 \leq n < F_{\alpha+\widetilde{\beta}}(n)$ und $\nu(\iota_0) < F_{\widetilde{\beta}}(n) \stackrel{9.1\,(a)}{\leq} F_{\alpha+\widetilde{\beta}}(n)$, folgt mit $(\triangleleft)$

$$\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, \neg A_{\iota_0}. \tag{1}$$

Aus dem Abschwächungslemma 11.3 folgt weiter $\Sigma\vdash^{\alpha,n}_{\rho}\Gamma, A_{\iota_0}, \neg A$. Zusammen mit $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A_{\iota_0}, A$ ergibt die Induktionsvoraussetzung dann

$$\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A_{\iota_0}. \tag{2}$$

Ein (Cut) von (1) und (2) ergibt wegen $|A_{\iota_0}| < |A| \leq \rho, n(A_{\iota_0}) \leq n(\widetilde{\beta}) \stackrel{9.1\,(c)}{\leq} n(\alpha+\widetilde{\beta})$ die Behauptung.
(Cut): Gelte $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A, B$ und $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, A, \neg B$ mit $\widetilde{\beta}+1 = \beta$, $|B| < \rho$, $n(B) \leq n(\widetilde{\beta})$. Dann folgt mit Abschwächungslemma 11.3 und der Induktionsvoraussetzung $\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, B$ und $\Sigma\vdash^{\alpha+\widetilde{\beta},n}_{\rho}\Gamma, \neg B$. Ein (Cut) ergibt dann die Behauptung (da $n(\widetilde{\beta}) \leq n(\alpha+\widetilde{\beta})$).
$(\triangleleft)$: Gilt $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},k}_{\rho}\Gamma, A$ mit $\widetilde{\beta} <_k \beta$, $k < F_{\beta}(n)$, $1 \leq n$. Nach Abschwächungslemma 11.3 gilt dann auch $\Sigma\vdash^{\widetilde{\beta},k\cup n}_{\rho}\Gamma, A$ und $\Sigma\vdash^{\alpha,k\cup n}_{\rho}\Gamma, \neg A$, nach Induktions-

voraussetzung also $\Sigma\vdash_\rho^{\alpha+\widetilde{\beta},k\cup n}\Gamma$. Da nun $\alpha+\widetilde{\beta} <_{k\cup n} \alpha+\beta$, $k\cup n < F_\beta(n) \overset{9.1\,(a)}{\leq} F_{\alpha+\beta}(n)$ mit $1 \leq n$, folgt die Behauptung mit $(\lhd)$.

Lemma 11.10
(Wendet man ein gut wachsendes f auf die Herleitungsordnung an, ziehen sich alle Beweisschlüsse durch.)
Sei $f : \gamma \to \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$ gut wachsend($\gamma \leq \psi_0(\epsilon_{\Omega_\omega+1})$).
Dann folgt:
(a) Gilt $A \overset{\triangle}{=} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$, $A \in \Gamma$ und $\forall\iota \in I(\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha),n\cup\nu(\iota)}\Gamma, A_\iota)$, dann folgt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha+1),n}\Gamma$.
(b) Gilt $A \overset{\triangle}{=} \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota$, $A \in \Gamma$ und $\exists\iota_0 \in I(\nu(\iota_0) < F_\alpha(n)$, $n(A_{\iota_0}) \leq n(\alpha) \neq 0$, $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha),n}\Gamma, A_{\iota_0})$, dann folgt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha+1),n}\Gamma$.
(c) Gilt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha),n}\Gamma, A$ und $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha),n}\Gamma, \neg A$ mit $|A| < \rho$, $n(A) \leq n(\alpha)$, dann folgt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha+1),n}\Gamma$.
(d) Gilt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\beta),k}\Gamma$ mit $\beta <_k \alpha$, $k < F_\alpha(n)$, $n \neq 0$, dann gilt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha),n}\Gamma$.

Beweis:
Beachte generell: $f(\alpha)+1 \widetilde{\leq}_1 f(\alpha+1)$, also folgt aus der Regel $(\widetilde{<})$ 11.4:
$(\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha)+1,n}\Gamma \Rightarrow \Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha+1),n}\Gamma))$ $(*)$
Zu (a): Mit $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$ folgt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha)+1,n}\Gamma$ und mit $(*)$ die Behauptung.
Zu (b): Mit $(\bigvee\!\!\!\bigvee)$ folgt, da $F_\alpha(n) \leq F_{f(\alpha)}(n)$ und $n(\alpha) \leq n(f(\alpha))$, $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha)+1,n}\Gamma$, mit $(*)$ dann die Behauptung.
Zu (c): Wegen $n(\alpha) \leq n(f(\alpha))$ folgt mit (Cut) $\Sigma\vdash_\rho^{f(\alpha)+1,n}\Gamma$, und mit $(*)$ die Behauptung.
Zu (d): Gilt $\Sigma\vdash_\rho^{f(\beta),k}\Gamma$, $\beta <_k \alpha$, $,k < F_\alpha(n)$, $n \neq 0$. Dann folgt $\beta \widetilde{<}_n^1 \alpha$, also $f(\beta)\widetilde{<}_n f(\alpha)$. Mit Regel $(\widetilde{<})$, Lemma 11.4, folgt die Behauptung.

Satz 11.11
1. Schnitteliminationssatz:
$\Sigma\vdash_{\rho+(1+\rho_1)}^{\alpha,n}\Gamma$, $\alpha < \omega^{\delta_0+1}$, $\delta := \omega^{\delta_0}$ *wobei mit* $\rho_0 := 1+\rho_1$ $\rho+\rho_0 =_{NF} \rho+\rho_0$.
$\Rightarrow \Sigma\vdash_\rho^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha}),n}\Gamma$.

Beweis durch Hauptinduktion nach ρ_1, Nebeninduktion nach α:
Fallunterscheidung nach der letzten Regel.

Die Fälle $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$, $(\bigvee\!\!\!\bigvee)$, (Cut) mit $|A| < \rho$, und $(\triangleleft)$ folgen aus Lemma 11.10, Folgerung 10.8 und der Nebeninduktionsvoraussetzung.
Es bleibt der Fall (Cut) mit $|A| \geq \rho$.
Sei $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, $\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},n}_{\rho+(1+\rho_1)}\Gamma, A$, $\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},n}_{\rho+(1+\rho_1)}\Gamma, \neg A$ mit $\rho \leq |A| < \rho + (1 + \rho_1)$ und $n(A) \leq n(\widetilde{\alpha})$. Nach Nebeninduktionsvoraussetzung gilt $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}),n}_{\rho}\Gamma, A$ und $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}),n}_{\rho}\Gamma, \neg A$. Mit dem Reduktionslemma 11.9 folgt $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 2,n}_{|A|}\Gamma$.
Falls $|A| = \rho$, folgt, da, falls $\phi_{\rho_1+1}\gamma \leq \delta + \widetilde{\alpha} < \phi_{\rho_1+1}(\gamma + 1)$, $\phi_{\rho_1+1}\gamma \leq \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}} + 1 <_1 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}\cdot 2 <_1 \omega^{\delta+\alpha} < \phi_{\rho_1+1}(\gamma+1)$ gilt, mit Lemma 10.7(b)
$\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 2 \overset{10.15}{<_1} \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1) <_2 \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})$. Da $2 \cup n < n(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha}))\cdot 2 + n + 1 \leq F_{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})}(n)$, folgt mit Abschwächungslemma 11.3 und einem $(\triangleleft)$-Schluß $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha}),n}_{\rho}\Gamma$.
Falls $|A| > \rho$, folgt $|A| = \rho + 1 + \rho_2$ mit $\rho_2 < \rho_1$. Nach Hauptinduktionsvoraussetzung folgt $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3}),n}_{\rho}\Gamma$. Nun gilt $n(\rho_2) \leq n(1 + \rho_2) \leq n(\rho + 1 + \rho_2) = n(A) \leq n(\alpha) \overset{10.8}{\leq} n(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha}))$.
Mit $k := n(\rho_2)$ gilt dann $\rho_2 <_k \rho$, also nach Lemma 10.19
$\phi_{\rho_2}(\omega^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 3}) <_{\max\{4,k+2\}} \phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})$. Da $4 < 2\cdot 2 + 1 + 1 \leq 2\cdot n(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})) + n + 1 \leq F_{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})}(n)$ und $k + 2 \leq n(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})) + 2 < 2\cdot n(\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})) + n + 1 \leq F_{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha})}(n)$, folgt mit $(\triangleleft)$ $\Sigma\vdash^{\phi_{\rho_1}(\omega^{\delta+\alpha}),n}_{\rho}\Gamma$.

Satz 11.12
2. Schnitteliminationssatz:
$\Sigma\vdash^{\alpha,n}_{\rho+\omega^\gamma}\Gamma$, $\alpha < \omega^{\delta_0+1}$, $\delta := \omega^{\delta_0}$, $\rho + \omega^\gamma =_{NF} \rho + \omega^\gamma$.
$\Rightarrow \Sigma\vdash^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha}),n}_{\rho}\Gamma$.

Beweis durch Hauptinduktion nach ρ, Nebeninduktion nach α:
Fallunterscheidung nach der letzten Regel.
Die Fälle $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$, $(\bigvee\!\!\!\bigvee)$, (Cut) mit $|A| < \rho$, und $(\triangleleft)$ folgen aus Lemma 11.11 und der Nebeninduktionsvoraussetzung.
Es bleibt der Fall (Cut) mit $|A| \geq \rho$.
Sei $\alpha = \widetilde{\alpha} + 1$, $\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},n}_{\rho+\omega^\gamma}\Gamma, A$, $\Sigma\vdash^{\widetilde{\alpha},n}_{\rho+\omega^\gamma}\Gamma, \neg A$ mit $\rho \leq |A| < \rho + \omega^\gamma$ und $n(A) \leq n(\widetilde{\alpha})$. Nach Nebeninduktionsvoraussetzung gilt $\Sigma\vdash^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}),n}_{\rho}\Gamma, A$ und $\Sigma\vdash^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}),n}_{\rho}\Gamma, \neg A$. Mit dem Reduktionslemma 11.9 folgt

$\Sigma\vdash^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})\cdot 2,n}_{|A|}\Gamma$.
Falls $|A| = \rho$, folgt wie in Satz 11.11 die Behauptung.
Falls $|A| > \rho$, folgt $|A| = \rho + \omega^{\alpha_k} + \cdots + \omega^{\alpha_0}$ mit $\gamma > \alpha_k \geq \cdots \geq \alpha_0$.
Nach Hauptinduktionsvoraussetzung folgt mit $\lambda_0 := \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})$, $\lambda_1 := \phi_{\alpha_0}(\omega^{\lambda_0\cdot 3})$, $\lambda_{i+1} := \phi_{\alpha_i}(\omega^{\lambda_i\cdot 2})$ sukzessiv für $i = 1,\ldots,k+1$
$\Sigma\vdash^{\lambda_i,n}_{\rho+\omega^{\alpha_k}+\cdots+\omega^{\alpha_i}}\Gamma$.
Sei $m := n(\alpha_0)\cup\cdots\cup n(\alpha_k)\cup\{1\}$, $\alpha_{-1} := 0$.
Wir zeigen, $\lambda_{k+1} <_{m+2\cdot k+3} \phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})$, mit $m+2\cdot k+3 < F_{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})}(n)$.
(Daraus folgt $\lambda_{k+1}\widetilde{<}_n\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})$. Dann folgt mit Regel ($\widetilde{<}$) 11.4 aus $\Sigma\vdash^{\lambda_{k+1},n}_{\rho}\Gamma$ $\Sigma\vdash^{\omega^{\delta+\alpha},n}_{\rho}\Gamma$, was zu zeigen war.)
Behauptung: $\forall i \leq k+1 \exists 1 \leq l \leq 2\cdot i+1 (\lambda_i\cdot 3 <_{m+2\cdot i+1} \phi^l_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1))$.
Beweis durch Induktion nach i:
$i=0$: $\lambda_0\cdot 3 = \omega^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})}\cdot 3 \overset{10.15}{<_2} \omega^{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1} = \phi_{\alpha_{-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.
Induktionsschritt von i auf $i+1$:
Sei $j := 3$ falls $i = 0$, und $j := 2$, falls $i > 0$.
$\lambda_i\cdot j \leq_0 \lambda_i\cdot 3 <_{m+2\cdot i+1} \phi^l_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$ für ein $l \leq 2\cdot i+1$.

Mit Lemma 10.7(a) folgt $\omega^{\lambda_i\cdot j} <_{m+2\cdot i+2} \omega^{\phi^l_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)} = \phi^{l+s}_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$, wobei $s := 0$, falls $\alpha_{i-1} > 0$, und $s := 1$, falls $\alpha_{i-1} = 0$.
Sei $\mu_0 := \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})$,
$$\mu_1 := \begin{cases} \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1), & \text{falls } \alpha_i+1=\gamma,\\ \phi_{\alpha_i+1}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1), & \text{falls } \alpha_i+1<\gamma.\end{cases}$$
(Beachte, daß $\mu_0 = \phi_{\alpha_i+1}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}))$, falls $\alpha_i+1<\gamma$.)
Falls $\alpha_i = \alpha_{i-1}$, folgt wegen $\mu_0 < \omega^{\lambda_i\cdot j} <_{m+2\cdot i+2} \phi^{l+s}_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) = \phi^{l+s}_{\alpha_i}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) < \mu_1$ nach Lemma 10.7(b) $\lambda_{i+1} = \phi_{\alpha_i}(\omega^{\lambda_i\cdot j}) <_{m+2\cdot i+3} \phi^{l+s+1}_{\alpha_i}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.
Falls $\alpha_i > \alpha_{i-1}$, folgt zunächst $\alpha_{i-1} <_m \alpha_i$. Da $l+s \leq 2\cdot i+2$, folgt nach Lemma 10.17(b) $\mu_0 < \omega^{\lambda_i\cdot j} \overset{\text{s.o.}}{<_{m+2\cdot i+2}} \phi^{l+s}_{\alpha_{i-1}}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) =$

$\phi^{l+s}_{\alpha_{i-1}}(\phi_{\alpha_i}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}))+1) \overset{10.17(b)}{<_{m+2\cdot i+2}} \phi_{\alpha_i}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) < \mu_1$. Lemma 10.7 (b) ergibt dann $\lambda_{i+1} = \phi_{\alpha_i}(\omega^{\lambda_i\cdot j}) <_{m+2\cdot i+3} \phi^2_{\alpha_i}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$.

Es folgt $\lambda_{k+1} <_0 \lambda_{k+1}\cdot 3 <_{m+2\cdot k+3} \phi^l_{\alpha_k}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1)$ für ein $l \leq 2\cdot k+3$.
Da $\alpha_k <_m \gamma$, folgt nach Lemma 10.17(b) $\phi^l_{\alpha_k}(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}})+1) <_{\max\{m+2,2\cdot k+3\}} \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1)$.

Sei $\phi_{\gamma+1}(\mu_0) \leq \delta + \widetilde{\alpha} < \phi_{\gamma+1}(\mu_0 + 1)$. Aus $\phi_{\gamma+1}(\mu_0) < \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}} + 1 <_0 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}} \cdot 2 <_1 \omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1} < \phi_{\gamma+1}(\mu_0+1)$ folgt nach Lemma 10.7(b) $\phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}}+1) <_2 \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1})$.
Also erhalten wir insgesamt $\lambda_{k+1} <_{m+2\cdot k+3} \phi_\gamma(\omega^{\delta+\widetilde{\alpha}+1}) = \phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})$.
Es gilt weiter $n(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})) \geq n(\alpha) = n(\widetilde{\alpha}) + 1 \geq n(A) + 1 = n(\rho + \omega^{\alpha_k} + \cdots + \omega^{\alpha_0}) + 1 \geq n(\rho) + n(\omega^{\alpha_k}) + \cdots + n(\omega^{\alpha_0}) + 1$.
Da $n(\omega^{\alpha_i}) \geq n(\alpha_i)$, $n(\omega^{\alpha_i}) \geq 2$, folgt $n(\phi_\rho(\omega^{\delta+\alpha})) \geq m + 2\cdot k + 1$, also $m + 2\cdot k + 3 < 2\cdot m + 4\cdot k + 3 + n \leq 2\cdot n(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})) + n + 1 \leq F_{n(\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha}))}(n) \leq F_{\phi_\gamma(\omega^{\delta+\alpha})}(n)$.

Lemma 11.13
Gilt für alle Formeln A mit $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota \in I} A_\iota$ oder $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota \in I} A_\iota$ $\forall \iota \in I(|A_\iota| + 1 \,\widetilde{\leq}_{n \cup \nu(\iota)}\, |A|)$. Dann gilt für alle Formeln A $\Sigma \vdash_0^{|A| \overset{\#}{\cdot} 2+1, n} \Gamma, A, \neg A$.

Beweis durch transfinite Induktion nach $|A|$:
O.E. sei $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota \in I} A_\iota$ (denn, falls $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota \in I} A_\iota$, folgt $\neg A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota \in I} \neg A_\iota$ und $\neg\neg A \equiv A$, vertausche also A und $\neg A$.)

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\forall \iota \in I(\Sigma \vdash_0^{|A_\iota| \overset{\#}{\cdot} 2+1, n} \Gamma, A_\iota, \neg A_\iota)$, also abgeschwächt und nach Anwendung eines $(\bigvee\!\!\!\bigvee)$-Schlusses wegen $\nu(\iota) < F_{|A_\iota| \overset{\#}{\cdot} 2+1}(\nu(\iota) \cup n)$ und $n(A_\iota) \leq n(|A_\iota| \overset{\#}{\cdot} 2 + 1)$ $\Sigma \vdash_0^{|A_\iota| \overset{\#}{\cdot} 2+2, \nu(\iota) \cup n} \Gamma, A_\iota, \neg A$. Mit Regel $(\widetilde{<})$ 11.4 folgt, da $|A_\iota| \overset{\#}{\cdot} 2 + 2 \,\widetilde{\leq}_{n \cup \nu(\iota)}\, |A| \overset{\#}{\cdot} 2$,
$\Sigma \vdash_0^{|A| \overset{\#}{\cdot} 2, \nu(\iota) \cup n} \Gamma, A_\iota, \neg A$ für alle $\iota \in I$ also mit einem $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$-Schluß
$\Sigma \vdash_0^{|A| \overset{\#}{\cdot} 2+1, n} \Gamma, A, \neg A$, was zu zeigen war.

Kapitel 12

Interpretation der Peanoarithmetik in (Σ)

In diesem Kapitel wird die Peano-Arithmetik (PA) eingeführt und in (Σ) interpretiert. Damit können in Kapitel 15 Schranken für in (PA) beweisbare Π^0_2-Sätze gefunden werden.

Definition 12.1
Definition des Systems (PA) der Peano-Arithmetik.
Terme sind die Variablen $x, y, \ldots$, die Konstante 0 sowie St, falls t Term, wobei S die Nachfolgerfunktion (Successor) bezeichnen soll. Dann sei
$l :\equiv S^l 0$.
Primformeln seien $(f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1})$ und $(f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1})$, wobei f ein Symbol für eine elementare Funktion sei, und t_i Terme sind.
Formeln sind Primformeln A (mit $|A| := 0$) , $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, (mit $|(A \wedge B)| := |(A \vee B)| := \max\{|A| + 1, |B| + 1\}$), $\forall x A$, $\exists x A$ (mit $|\forall x A| := |\exists x A| := |A| + 1$), falls A, B Formeln sind.
Die Negation einer Formel sei eine definierte Operation, bezeichnet mit $\neg$, also $\neg(f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1}) :\equiv (f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1})$, $\neg(f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1}) :\equiv (f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1})$, $\neg(A \wedge B) :\equiv (\neg A \vee \neg B)$, $\neg(A \vee B) :\equiv (\neg A \wedge \neg B)$, $\neg(\forall x A) :\equiv \exists x(\neg A)$, $\neg(\exists x A) :\equiv \forall x(\neg A)$.
Die Axiome von (PA) seien :
1) Logische Axiome: $PA \vdash^m \Gamma, \neg A, A$ für jede Formel A und jedes $m \geq 2 \cdot |A|$.

2) Elementare Axiome: Alle Einsetzungen von Termen für $x, y, z, \ldots$ in : ($m \in \mathbb{N}$)

$(=)$ $PA \vdash^m \Gamma, x = x$, $PA \vdash^m \Gamma, x \neq y, y = x$,
$PA \vdash^m \Gamma, x \neq y, y \neq z, x = z$.

(S) $PA \vdash^m \Gamma, Sx \neq 0$, $PA \vdash^m \Gamma, Sx \neq Sy, x = y$,
$PA \vdash^m \Gamma, x \neq y, Sx = Sy$.

(f) $PA \vdash^m \Gamma$, *„ Definitionsgleichung für jede elementare Funktion f“, zum Beispiel*

$(+)$ $PA \vdash^m \Gamma, x + 0 = x$,
$PA \vdash^m \Gamma, x + y \neq z, x + Sy = Sz$,
$PA \vdash^m \Gamma, x \neq x', y \neq y', z \neq z', x + y \neq z, x' + y' = z'$,
$PA \vdash^m \Gamma, x + y \neq z, x + y \neq z', z = z'$.

3) Induktionsaxiome: $PA \vdash^m \Gamma, \neg A(0), \exists x(A(x) \wedge \neg A(Sx)), \forall x A(x)$ *für alle Formeln* A, $m \in \mathbb{N}, |A| + 1 \leq m$.

4) Logische Regeln:

$(\wedge)$ $PA \vdash^m \Gamma, A_0$, $PA \vdash^m \Gamma, A_1 \Rightarrow PA \vdash^{m+1} \Gamma, (A_0 \wedge A_1)$.

$(\vee)$ $PA \vdash^m \Gamma, A_i$ *mit* $i \in \{0, 1\}$ *und* $|A_i| \leq m \Rightarrow PA \vdash^{m+1} \Gamma, (A_0 \vee A_1)$.

$(\forall)$ $PA \vdash^m \Gamma, A(x)$ *wobei* x *nicht frei in* $\Gamma \Rightarrow PA \vdash^{m+1} \Gamma, \forall x A(x)$.

$(\exists)$ $PA \vdash^m \Gamma, A(t)$ *mit* $|A(t)| \leq m$ *und* $t = S^l 0$ *oder* $S^l x$ *mit* $l \leq m$
$\Rightarrow PA \vdash^{m+1} \exists x A(x)$.

(Cut) $PA \vdash^m \Gamma, A$, $PA \vdash^m \Gamma, \neg A$ *mit* $|A| \leq m \Rightarrow PA \vdash^{m+1} \Gamma$.

Die Formeln werden im Beweissystem (Σ) *standardmäßig interpretiert, d.h.: Ist* A *wahre Primformel, so gilt* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota \in \emptyset} A_\iota$, *ist* A *falsche Primformel, so gilt* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota \in \emptyset} A_\iota$. *Weiter* $(A_0 \wedge A_1) \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota \in \{0,1\})} A_\iota$, $(A_0 \vee A_1) \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota \in \{0,1\}} A_\iota$, $\forall x A(x) \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i \in \mathbb{N}} A(i)$, $\exists x A(x) \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{i \in \mathbb{N}} A(i)$.

Lemma 12.2

Einbettungslemma für (PA)*:*
$PA \vdash^m \Gamma[a_0, \ldots, a_r]$, *wobei* $a_0, \ldots, a_r$ *alle freien Variablen in* Γ *sind. Dann gilt* $\Sigma \vdash_m^{\omega + m, \max\{1, m_1, \ldots, m_r\}} \Gamma[m_1, \ldots, m_r]$ *für alle* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$.

Beweis:
Beweis der Behauptung durch Induktion nach m.
Schreibweisen:
$A^* := A[m_1, \ldots, m_r]$, genauso $\Gamma^* := \Gamma[m_1, \ldots, m_r]$.

Weiter sei $n := \max\{1, m_1, \ldots, m_r\}$.
Fallunterscheidung nach der letzten Regel:
a) Logisches Axiom:
Nach Lemma 11.13 gilt, da $|A^*| = |A| \in \mathbb{N}$,
$\Sigma\vdash_0^{2\cdot|A|+1,n} \Delta^*, A^*, \neg A^*$ $(*)$.
Da $2\cdot|A| + 1 <_k \omega + 2\cdot|A|$ mit $k := 2\cdot|A| + 1 < F_{\omega+2\cdot|A|}(n)$, folgt mit $(\triangleleft)$ und Abschwächungslemma 11.3 $\Sigma\vdash_{2\cdot|A|}^{\omega+2\cdot|A|,n} \Delta^*, A^*, \neg A^*$ und mit $(\triangleleft)$ die Behauptung.
b) Elementare Axiome:
Sei $\Gamma\equiv\Delta, A_1, \ldots, A_k$. Dann folgt immer $\models A_i{}^*$ für ein i, also $A_i{}^* \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\emptyset} A_\iota$. Mit $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$ folgt nun $\Sigma\vdash_m^{\omega+m,n} \Delta^*, A_1{}^*, \ldots, A_k{}^*$.
c) Induktionsaxiom:
Sei $\Gamma\equiv\Delta, \neg A(0), \exists x(A(x) \wedge \neg A(Sx)), \forall x A(x)$.
Sei $l := |A(0)| = |A^*(0)|,\ C :\equiv \exists x(A^*(x) \wedge \neg A^*(Sx))$.
Zu zeigen ist $\Sigma\vdash_{l+1}^{\omega+l+1,n} \Delta^*, \neg A^*(0), C, \forall x A^*(x)$.
(Daraus folgt mit $(\triangleleft)$ $\forall m \geq |A| + 1(\Sigma\vdash_m^{\omega+m,n} \Delta^*, \neg A^*(0), C, \forall x A^*(x))$.
Wir zeigen durch Induktion nach m
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+m+3,n\cup m} \Delta^*, \neg A^*(0), C, A^*(m)$.
(Dann folgt, da $2\cdot l + m + 3 <_{n\cup(2\cdot l+m+3)} \omega + l$ und $n \cup (2\cdot l + m + 3) < 2\cdot(l+2)+(n\cup m)+1 = 2\cdot n(\omega+l)+(n\cup m)+1 \leq F_{n(\omega+l)}(n\cup m) \leq F_{\omega+l}(n\cup m)$, mit $(\triangleleft)$ $\Sigma\vdash_{l+1}^{\omega+l,n\cup m} \Delta^*, \neg A^*(0), C, \neg A^*(m)$ und mit $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$ dann
$\Sigma\vdash_{l+1}^{\omega+l+1,n} \Delta^*, \neg A^*(0), C, \forall x A^*(x)$.)

Für $m = 0$ folgt die Behauptung aus $(*)$ in a) mit $(\triangleleft)$.
Sei $m = m' + 1$. Aus a) folgt
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+1,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), A^*(m'), \neg A^*(m'), A^*(Sm')$ sowie
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+1,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), \neg A^*(Sm'), \neg A^*(m'), A^*(Sm')$, mit $(\bigwedge\!\!\!\bigwedge)$ dann
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+2,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), (A^*(m') \wedge \neg A^*(Sm')), \neg A^*(m'), A^*(Sm')$.
Mit $(\triangleleft)$ folgt nun
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+m'+2,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), (A^*(m') \wedge \neg A^*(Sm')), \neg A^*(m'), A^*(Sm')$.
Da $m' < F_{2\cdot l+m'+2}(n\cup m')$ und $n(A^*(m')\wedge\neg A^*(Sm')) = l+1 \leq n(2\cdot l+m'+2)$, folgt mit $(\bigvee\!\!\!\bigvee)$
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+m'+3,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), \exists x(A^*(x) \wedge \neg A^*(Sx)), \neg A^*(m'), A^*(Sm')$.
Aus der Induktionsvoraussetzung folgt
$\Sigma\vdash_{l+1}^{2\cdot l+m'+3,n\cup m'} \Delta^*, \neg A^*(0), C, A^*(m')$. Ein (Cut) mit Schnittformel $A^*(m')$ $(|A^*(m')| = l < l + 1$ und $n(A^*(m')) = l \leq n(2\cdot l + m' + 3))$ ergibt

$\Sigma\vdash^{2\cdot l+m'+4, n\cup(m'+1)}_{l+1}\Delta^*, \neg A^*(0), C, A^*(Sm')$.
d) Falls Γ mit (Cut), $(\wedge)$, $(\vee)$ erschlossen wurde, folgt die Behauptung leicht aus der Induktionsvoraussetzung .
e) Falls die letzte Regel $(\exists)$ war, d.h. $\Gamma\equiv\Delta, \exists x A(x)$ und $PA\vdash^{m-1}\Delta, A(t)$ mit $t\equiv S^l 0$ oder $S^l a_i$, wobei $l, |A(0)| \leq m-1$. Ist $t = S^l a_i$ so folgt $(A(t))^*\equiv A(S^l m_i)\equiv A(l+m_i)$. Sei in diesem Fall $k := m_i$, und im Fall $t\equiv S^l 0$ sei $k := 0$. Es folgt $k \leq n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt
$\Sigma\vdash^{\omega+(m-1),n}_{(m-1)}\Delta^*, (A(k+l))^*)$. Da $n((A(k+l))^*) = |A(0)| \leq m-1 < n(\omega+(m-1))$ und $k+l \leq n+m < F_{n(\omega+m-1)}(n) \leq F_{\omega+m-1}(n)$, folgt mit $(\bigvee\!\!\!\!\bigvee)$
$\Sigma\vdash^{\omega+m,n}_{m}\Gamma^*$.
f)Falls die letzte Regel $(\forall)$ war, d.h. $\Gamma\equiv\Delta, \forall x A(x)$ und $PA\vdash^{m-1}\Delta, A(a)$, mit a nicht frei in Δ, folgt nach der Induktionsvoraussetzung
$\Sigma\vdash^{\omega+m-1,n\cup l}_{m-1}\Delta^*, A^*(l)$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Mit $(\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge)$ folgt
$\Sigma\vdash^{\omega+m,n}_{m}\Delta^*, \forall x A^*(x)$.

Kapitel 13

Definition von (DA), (RA^*) und Interpretationen Int^σ

In diesem Kapitel wird die Δ^1_1-Analysis (DA) im Tait-Kalkül und das halbformale System (RA^*), das eine spezieller Fall von (Σ) ist, eingeführt. Weiter wird die Interpretation von Formeln von (DA) in (RA^*) definiert.

Definition 13.1
Definition des Systems (DA) der Δ^1_1 - Analysis:
Die primitiven Symbole seien:
1. Abzählbar unendlich viele freie und gebundene Zahl- und Prädikatvariable.
2. 0, S, *, Symbole für n-stellige elementare Funktionen.*
3. $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, λ, $($, $)$, $\sim$, *, [Komma], . [Punkt].*
($\sim$ ist dabei ein Negationssymbol).
Terme seien 0, freie Zahlvariable, sowie St, falls t Term ist.
$|S^l 0| := |S^l a| := l$ *(a freie Zahlvariable).*
Primformeln seien $(f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1})$ und $(f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1})$, falls f Symbol für eine n-stellige elementare Funktion und $t_1, \ldots, t_{n+1}$ Terme sind.

Induktive Definition von Formeln und Prädikatoren mit ihrem Rang ($|\cdot|$).
1) Jede Primformel ist Formel vom Rang $|(f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1})| = |(f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1})| = \max\{|t_1|, \ldots, |t_{n+1}|\}$.
2) Für jede freie Prädikatvariable U gilt: U und $\sim U$ sind Prädikatoren vom Rang 0.

3) Ist P Prädikator und t Term, so ist $P(t)$ Formel vom Rang $\max\{|P|, |t|\}+1$.
4) Mit A, B sind auch $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ Formeln vom Rang $\max\{|A|, |B|\}+1$.
5) Ist $F(0)$ Formel, x gebundene Zahlvariable, die nicht in $F(0)$ vorkommt, so sind $\forall xF(x), \exists xF(x)$ Formeln, sowie $\lambda x.F(x)$ und $\sim\lambda x.F(x)$ Prädikatoren vom Rang $|F(0)|+2$.
6) Ist U freie Prädikatvariable, $F(U)$ Formel, die die gebundene Prädikatvariable X nicht enthält, so sind $\forall XF(X)$, $\exists XF(X)$ Formeln vom Rang $|F(U)|+3$.
Beachte, daß das Symbol $\sim$ nur in der Form $\sim X$ und $\sim U$ und $\sim\lambda x.F(x)$ in Formeln und Prädikatoren vorkommt.

Die Negation von Formeln und Prädikatoren sei eine definierte Operation, bezeichnet mit dem Symbol $\neg$:
$\neg(f(t_1,\dots,t_n)=t_{n+1}) :\equiv (f(t_1,\dots,t_n)\neq t_{n+1})$, $\neg(f(t_1,\dots,t_n)\neq t_{n+1}) :\equiv (f(t_1,\dots,t_n)=t_{n+1})$, $\neg(A\wedge B) :\equiv (\neg A\vee\neg B)$, $\neg(A\vee B) :\equiv (\neg A\wedge\neg B)$, $\neg(\forall xA) :\equiv \exists x(\neg A)$, $\neg(\exists xA) :\equiv \forall x(\neg A)$, $\neg(\forall XA) :\equiv \exists X(\neg A)$, $\neg(\exists XA) :\equiv \forall X(\neg A)$, $\neg U :\equiv (\sim U)$, $\neg(\sim U) :\equiv U$, $\neg(\lambda x.F(x)) :\equiv \sim\lambda x.F(x)$,
$\neg(\sim\lambda x.F(x)) :\equiv \lambda x.F(x)$, $\neg(P(t)) :\equiv (\neg P)(t)$.

Weiter $(A\to B) :\equiv (\neg A\vee B)$ *sowie*
$(A\leftrightarrow B) :\equiv ((A\to B)\wedge(B\to A)) \equiv ((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$.

Definition von $DA\vdash^m\Gamma$:
1) Logisches Axiom: $DA\vdash^{|A|+3}\Gamma, A, \neg A$.
2) Elementare Axiome: alle Einsetzungen von Termen für x, y, $z, \dots$ in
$(=)$ $DA\vdash^1\Gamma, x=x$,
$DA\vdash^1\Gamma, x\neq y, y=x$,
$DA\vdash^1\Gamma, x\neq y, y\neq z, x=z$,
(S) $DA\vdash^1\Gamma, Sx\neq 0$,
$DA\vdash^1\Gamma, Sx\neq Sy, x=y$,
$DA\vdash^1\Gamma, x\neq y, Sx=Sy$.
(f) $DA\vdash^1\Gamma$, *„Definitionsgleichung für jede elementare Funktion f“, zum Beispiel*
$(+)$ $DA\vdash^1\Gamma, x+0=x$,
$DA\vdash^1\Gamma, x+y\neq z, x+Sy=Sz$,
$DA\vdash^1\Gamma, x\neq x', y\neq y', z\neq z', x+y\neq z, x'+y'=z'$,
$DA\vdash^1\Gamma, x+y\neq z, x+y\neq z', z=z'$.

3) Schlußregeln:

$(\wedge)$ $DA\vdash^n\Gamma, A_0,\ DA\vdash^n\Gamma, A_1\ \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, (A_0 \wedge A_1)$.

$(\vee)$ $DA\vdash^n\Gamma, A_i$ *mit* $i \in \{0,1\}$ *und* $n \geq (|A_i| + 1) \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, (A_0 \vee A_1)$.

$(\forall_1)$ $DA\vdash^n\Gamma, F(a)$ *wobei* a *nicht frei in* $\Gamma\ \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, \forall x F(x)$.

$(\exists_1)$ $DA\vdash^n\Gamma, F(t)$ *mit* $n \geq (|F(t)| + 1) \cup |t| \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\exists x F(x)$.

$(\forall_2)$ $DA\vdash^n\Gamma, F(U)$ *wobei* U *nicht frei in* $\Gamma\ \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, \forall X F(X)$.

$(\exists_2)$ $DA\vdash^n\Gamma, F(P)$ *wobei* P *ein elementarer Prädikator ist, d.h. ein Prädikator ohne gebundene Prädikatvariablen, mit* $n \geq (|F(P)| + 1) \cup |P|$ $\Rightarrow\ DA\vdash^{n+1}\exists X F(X)$.

$(\exists_3)$ $DA\vdash^n\forall x(\forall Y A(x,Y) \leftrightarrow \exists Y B(x,Y))$
$DA\vdash^n\Gamma, F(\lambda x.\forall Y A(x,Y))$
wobei $n \geq (|A(0,U)| + |F(U)|) + 3) \cup (|B(0,U)| + 3)$
und $A,\ B$ *keine gebundenen Prädikatvariable enthalten*
$\Rightarrow\ DA\vdash^{n+3}\Gamma, \exists X F(X)$.

(λ_1) $DA\vdash^n\Gamma, F(t) \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, \lambda x.F(x)(t)$.

(λ_2) $DA\vdash^n\Gamma, \neg F(t)$ *mit* $n \geq (|F(t)| + 1) \cup |t| \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, \sim\lambda x.F(x)(t)$.

(ind) $DA\vdash^n\Gamma, F(0)$,
$DA\vdash^n\Gamma, \neg F(a), F(Sa)$ *wobei* a *nicht frei in* Γ *und* $n \geq |F(0)| + 1$.
$\Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma, \forall x F(x)$.

(Cut) $DA\vdash^n\Gamma, A,\ DA\vdash^n\Gamma, \neg A$ *mit* $n \geq |A|\ \Rightarrow DA\vdash^{n+1}\Gamma$.

$(<)$ $DA\vdash^n\Gamma,\ m > n \Rightarrow DA\vdash^m\Gamma$.

Definition 13.2

Definition des halbformalen Systems (RA^*) *der verzweigten Analysis:*
Die primitiven Symbole seien:

1. *Abzählbar unendlich viele freie und gebundene Zahlvariable.*
2. *Abzählbar unendlich viele freie Prädikatvariable* U^0 *der Stufe* 0.
3. *Abzählbar unendlich viele gebundene Prädikatvariable* X^σ *jeder Stufe* $\sigma \neq 0$ *(*σ *Ordinalzahl).*
4. $0,\ S,$ *, Symbole für n-stellige elementare Funktionen.*
5. $\wedge,\ \vee,\ \forall,\ \exists,\ \lambda,\ (,\ ),\ \sim,$ *, [Komma] , . [Punkt].*

Zahlen sind $0,\ S0, \ldots,\ l :\equiv S^l 0$, *Terme sind Zahlen und* $a, Sa, SSa, \ldots$ *für freie Variable* a, $|S^l 0| := |S^l a| := l$.

Primformeln sind $(f(t_1, \ldots, t_n) = t_{n+1})$ *und* $(f(t_1, \ldots, t_n) \neq t_{n+1})$, *falls* t_i *Terme sind und* f *Symbol für eine* n*-stellige elementare Funktion.*

Induktive Definition von Quasi-Formeln und Quasi-Prädikatoren mit ihrem Rang (Bezeichnung $|A|$) und ihrer Stufe:
1. Jede Primformel ist eine Quasi-Formel der Stufe 0 *und vom Rang* $|(f(t_1,\ldots,t_n)=t_{n+1})| = |(f(t_1,\ldots,t_n)\neq t_{n+1})| = \max\{|t_1|,\ldots,|t_{n+1}|\}$.
2. Ist U^0 *freie Prädikatvariable, so sind* U^0 *und* $\sim U^0$ *Quasi-Prädikatoren der Stufe* 0 *und des Rangs* 0.
3. Ist P^σ *Quasi-Prädikator der Stufe* σ *und* t *Term, so ist* $P^\sigma(t)$ *Quasi-Formel der Stufe* σ *und vom Rang* $(|P^\sigma| \uplus |t|)+1$.
4. Mit A, B *Quasi-Formeln der Stufen* α, β *sind auch* $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$ *Quasi-Formeln der Stufe* $\max\{\alpha,\beta\}$ *und vom Rang* $(|A| \uplus |B|)+1$.
5. Ist $F(a)$ *Quasi-Formel der Stufe* α, a *freie,* x *gebundene Zahlvariable, die die nicht in* $F(a)$ *vorkommt, so sind* $\forall x F(x)$ *und* $\exists x F(x)$ *Quasi-Formeln, sowie* $\lambda x.F(x)$ *und* $\sim\lambda x.F(x)$ *Quasi-Prädikatoren der Stufe* α *und vom Rang* $|F(0)|\#\omega$.
6. Ist $F(U^0)$ *Quasi-Formel der Stufe* α, X^β *gebundene Prädikatvariable der Stufe* β*, die in* $F(U^0)$ *nicht vorkommt, so sind* $\forall X^\beta F(X^\beta)$ *und* $\exists X^\beta F(X^\beta)$ *Quasi-Formeln der Stufe* $\gamma=\max\{\alpha,\beta\}$ *und vom Rang* $(|F(U^0)|\uplus\omega^3\cdot\beta)\#\omega^2$.

Formeln und Prädikatoren sind Quasiformeln und Quasiprädikatoren ohne freie Zahl- und Prädikatvariablen.

Definition von $\neg A$ *für (Quasi-) Formeln und (Quasi-) Prädikatoren* A *(wobei ggf. auftretende gebundene Variablen* $x,y,\ldots,X^\alpha,Y^\alpha,\ldots$*, die nicht durch einen Quantor oder* λ *gebunden sind, wie freie Variable behandelt werden sollen):* $\neg(f(t_1,\ldots,t_n)=t_{n+1}) :\equiv (f(t_1,\ldots,t_n)\neq t_{n+1})$, $\neg(f(t_1,\ldots,t_n)\neq t_{n+1}) :\equiv (f(t_1,\ldots,t_n)=t_{n+1})$, $\neg(A\wedge B) :\equiv (\neg A\vee\neg B)$, $\neg(A\vee B) :\equiv (\neg A\wedge \neg B)$, $\neg(\forall x A) :\equiv \exists x(\neg A)$, $\neg(\exists x A) :\equiv \forall x(\neg A)$, $\neg(\forall X^\alpha A) :\equiv \exists X^\alpha(\neg A)$, $\neg(\exists X^\alpha A) :\equiv$
$\forall X^\alpha(\neg A)$, $\neg U^0 :\equiv (\sim U^0)$, $\neg(\sim U^0) :\equiv U^0$, $\neg(\lambda x.F(x)) :\equiv \sim\lambda x.F(x)$,
$\neg(\sim\lambda x.F(x)) :\equiv \lambda x.F(x)$, $\neg P^\alpha(t) :\equiv (\neg P^\alpha)(t)$.

Weiter $(A\to B) :\equiv (\neg A\vee B)$ *sowie*
$(A\leftrightarrow B) :\equiv ((A\to B)\wedge(B\to A)) \equiv ((\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A))$.

Wir ordnen jeder Formel A *eine Darstellung* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota$ *oder* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota$ *zu:*

Falls A *Primformel ist, so sei, falls* A *wahr,* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\emptyset} A_\iota$*, falls dagegen* A *falsch,* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in\emptyset} A_\iota$.

Falls $A \equiv \lambda x.F(x)(m)$*, so sei* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\{m\}} F(m)$.

Falls $A \equiv \sim\lambda x.F(x)(m)$*, so sei* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in\{m\}} \neg F(m)$.

Falls $A \equiv (A_0 \wedge A_1)$*, so sei* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in\{0,1\}} A_\iota$.

Falls $A \equiv (A_0 \vee A_1)$*, so sei* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in\{0,1\}} A_\iota$.

Falls $A \equiv \forall x F(x)$*, sei* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} F(n)$.

Falls $A \equiv \exists x F(x)$*, sei* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{n\in\mathbb{N}} F(n)$.

Falls $A \equiv \forall X^\sigma F(X^\sigma)$*, sei* $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{P\in I} F(P)$*, wobei* $I :\equiv \{P^\alpha \mid P^\alpha$ *Prädikator einer Stufe* $\alpha < \sigma$*,* P^α *ist mit* F *verträglich, d.h. die gebundenen Variablen von* P^α *sind verschieden von denen von* F $\}$.

Falls $A \equiv \exists X^\sigma F(X^\sigma)$*, sei* $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{P\in I} F(P)$*, wobei* $I :\equiv \{P^\alpha \mid P^\alpha$ *Prädikator einer Stufe* $\alpha < \sigma$*,* P^α *ist mit* F *verträglich* $\}$.

$RA^* \vdash^{\alpha,n}_{\rho} \Gamma$ *wird dann gemäß dem Beweiskalkül von Kapitel 11 definiert.*

Folgerung 13.3
Ist A (Quasi-)Formel oder (Quasi-)Prädikator von (RA^*) *der Stufe* σ*, dann gilt:*
(a) $\omega^3 \cdot \sigma \leq |A| < \omega^3 \cdot (\sigma + 1)$.
(b) $A \equiv \neg\neg A$.
(c) $|A| = |\neg A|$.
(d) $A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \neg A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} \neg A_\iota$ *(falls A Formel).*
(e) $A \triangleq \bigvee\!\!\!\bigvee_{\iota\in I} A_\iota \Rightarrow \neg A \triangleq \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\iota\in I} \neg A_\iota$ *(falls A Formel).*

Beweis durch Induktion nach dem Formelaufbau: klar.

Lemma 13.4
Sei $\vec{a} \equiv a_1, \ldots, a_k$ *freie Zahl-,* $\vec{U} \equiv U^0_1, \ldots, U^0_n$ *freie Prädikatvariable,* $\vec{t} \equiv t_1, \ldots, t_k$ *Terme,* $\vec{P} \equiv P^{\alpha_1}_1, \ldots, P^{\alpha_n}_n$ *Prädikatoren der Stufen* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$*, die mit der Quasi-Formel oder dem Quasi-Prädikator* $F(\vec{a}, \vec{U})$ *verträglich sind. Sei* $m := \max\{|t_1|, \ldots, |t_k|, n(P^{\alpha_1}_1), \ldots, n(P^{\alpha_n}_n)\}$.
Dann gilt:
(a) $n(F(\vec{a}, \vec{U})) \leq n(F(\vec{t}, \vec{P})) \leq n(F(\vec{a}, \vec{U})) + m$.
(b) Ist $Stufe(F(\vec{a}, \vec{U})) = \sigma$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \sigma$.

Dann folgt $|F(\vec{a},\vec{U})| \leq |F(\vec{t},\vec{P})| < |F(\vec{a},\vec{U})| + \omega{\cdot}(m+1)$.

(c) Ist $n=0$, *so folgt* $|F(\vec{a})| \leq |F(\vec{t})| \leq |F(\vec{a})| + m$.

(d) Ist $k=0$, $n=1$, $\alpha_1 < \beta$. *Dann folgt* $|F(P_1^{\alpha_1})| \tilde{<}_{n(P_1^{\alpha_1})\cup 1} |\forall X^\beta F(X^\beta)|$
$= |\exists X^\beta F(X^\beta)|$.

(e) Ist $k=1$, $n=0$. *Dann folgt* $|F(a_1)| \tilde{<}_{|t_1|\cup 1} |\forall x F(x)| = |\exists x F(x)|$
$= |(\sim)\lambda x.F(x)|$.

Beweis:

(a) Wir zeigen nur $n(F(\vec{t},\vec{P})) \leq n(F(\vec{a},\vec{U})) + m$ durch Induktion nach dem Aufbau der Formeln, $n(F(\vec{a},\vec{U})) \leq n(F(\vec{t},\vec{P}))$ folgt dann analog.

Zunächst gilt für Terme $s(\vec{a})$ $\quad |s(\vec{a})| \leq |s(\vec{t})| \leq |s(\vec{a})| + m$.

Falls $F(\vec{a},\vec{U}) \equiv (f(s_1(\vec{a}),\ldots,s_l(\vec{a})) = s_{l+1}(\vec{a}))$, folgt $|s_i(\vec{t})| \leq |s_i(\vec{a})| + m$, also $n(F(\vec{t},\vec{P})) = \max\{|s_1(\vec{t})|,\ldots,|s_k(\vec{t})|\} \leq \max\{|s_1(\vec{a})|+m,\ldots,|s_k(\vec{a})|+m\}$
$\leq |F(\vec{a},\vec{U})| + m$.

Falls $F(\vec{U},\vec{a}) \equiv U_i^0$ oder F unabhängig von $\vec{a},\vec{U}$, ist die Behauptung klar.

Falls $F(\vec{a},\vec{U}) \equiv (A(\vec{a},\vec{U}) \wedge B(\vec{a},\vec{U}))$, folgt $n(F(\vec{t},\vec{P})) \overset{9.9(c)}{=} \max\{n(A(\vec{t},\vec{P})),$
$n(B(\vec{t},\vec{P}))\} + 1 \overset{IV}{\leq} \max\{n(A(\vec{a},\vec{U})) + m, n(B(\vec{a},\vec{U})) + m\} + 1 =$
$\max\{n(A(\vec{a},\vec{U})), n(B(\vec{a},\vec{U}))\} + m + 1 \overset{9.9(c)}{=} n(F(\vec{a},\vec{U})) + m$.

Falls $F(\vec{a},\vec{U})) \equiv \forall x G(x,\vec{a},\vec{U}),\ \lambda x.G(x,\vec{a},\vec{U}))$, folgt $n(F(\vec{t},\vec{P})) = n(G(0,\vec{t},\vec{P}))$
$+ n(\omega) \overset{IV}{\leq} n(G(0,\vec{a},\vec{U})) + m + n(\omega) = n(F(\vec{a},\vec{U})) + m$.

Falls $F(\vec{a},\vec{U}) \equiv G(\vec{a},\vec{U})(s(\vec{a}))$, folgt $n(F(\vec{t},\vec{P})) \overset{9.9(c)}{=} \max\{n(G(\vec{t},\vec{P})), |s(\vec{t})|\} +$
$1 \overset{IV}{\leq} \max\{n(G(\vec{a},\vec{U})) + m, |s(\vec{a})| + m\} + 1 = \max\{n(G(\vec{a},\vec{U})), |s(\vec{a})|\} + 1 + m =$
$n(F(\vec{a},\vec{U})) + m$.

Falls $F(\vec{a},\vec{U}) \equiv \forall X^\gamma G(X^\gamma,\vec{a},\vec{U})$, folgt $n(F(\vec{t},\vec{P})) \overset{9.9(c)}{=} \max\{n(G(V^0,\vec{t},\vec{P})),$
$n(\omega^3{\cdot}\beta)\} + n(\omega^2) \overset{IV}{\leq} \max\{n(G(V^0,\vec{a},\vec{U})) + m,\ n(\omega^3{\cdot}\beta)\} + n(\omega^2) \leq$
$\max\{n(G(V^0,\vec{a},\vec{U})),\ n(\omega^3{\cdot}\beta)\} + n(\omega^2) + m \overset{9.9(c)}{=} n(F(\vec{a},\vec{U})) + m$.

In allen anderen Fällen folgt die Behauptung aus der Behauptung für $\neg F$, $|F(\vec{a},\vec{U})| = |\neg F(\vec{a},\vec{U})|$ und $|F(\vec{t},\vec{P})| = |\neg F(\vec{t},\vec{P})|$.

(b) i) Durch Induktion nach dem Aufbau von F folgt sofort wegen (a) und mit Lemma 9.9(f) $|F(\vec{a},\vec{U})| \leq |F(\vec{t},\vec{P})|$.

ii) Nach Folgerung 13.3(a) existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l+1)$.
Zeige $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l+1)$ durch Induktion nach dem Aufbau der Formeln.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv \forall X^\gamma G(X^\gamma, \vec{a}, \vec{U})$ mit $Stufe(G(V^0, \vec{a}, \vec{U})) < \sigma$, folgt aus $Stufe(F(\vec{a}, \vec{U})) = \sigma \quad \gamma = \sigma$, weiter $StufeG(V^0, \vec{t}, \vec{P})) < \sigma$, also $|G(V^0, \vec{a}, \vec{U})|, |G(V^0, \vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma$. Nach Definition und Lemma 9.9(a) folgt $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2 \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}2$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2 \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}2$.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv \forall X^\gamma G(X^\gamma, \vec{a}, \vec{U})$ mit $Stufe(G(V^0, \vec{a}, \vec{U})) = \sigma$, folgt $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |G(V^0, \vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$ für ein $l' \in \mathbb{N}$, weiter nach Induktionsvoraussetzung $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |G(V^0, \vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$. Nach Definition und Lemma 9.9(a) folgt $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1) \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+2)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1) \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+2)$.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv (A(\vec{a}, \vec{U}) \wedge B(\vec{a}, \vec{U}))$ mit $Stufe(A(\vec{a}, \vec{U}) = Stufe(B(\vec{a}, \vec{U})) = \sigma$, $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |A(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}s \le |B(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(s+1)$, folgt nach Induktionsvoraussetzung $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |A(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}s \le |B(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(s+1)$. Es folgt mit $l' := \max\{r, s\}$ $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv (A(\vec{a}, \vec{U}) \wedge B(\vec{a}, \vec{U}))$ mit $Stufe(A(\vec{a}, \vec{U}) < \sigma$ oder $Stufe(B(\vec{a}, \vec{U})) < \sigma$, sei o.E. $Stufe(B(\vec{a}, \vec{U})) < \sigma$, also $Stufe(A(\vec{a}, \vec{U})) = \sigma$, $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |A(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |A(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$. Weiter gilt $|B(\vec{a}, \vec{U})|, |B(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma$. Es folgt $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}r \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(r+1)$.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv \forall x G(x, \vec{a}, \vec{U})$ oder $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv \lambda x.G(x, \vec{a}, \vec{U})$, folgt aus $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |G(0, \vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$ nach Induktionsvoraussetzung $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |G(0, \vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$ und nach Definition $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |F(\vec{a}, \vec{U})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$ und $\omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}l' \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < \omega^3{\cdot}\sigma + \omega^2{\cdot}(l'+1)$.
Falls $F(\vec{a}, \vec{U}) \equiv Q(\vec{a}, \vec{U})(s(\vec{a}))$, folgt die Behauptung wie eben.
In allen anderen Fällen folgt die Behauptung aus der Behauptung für $\neg F(\vec{a}, \vec{U})$.

iii) Aus i) und ii) folgt $|F(\vec{a}, \vec{U})| \le |F(\vec{t}, \vec{P})| < |F(\vec{a}, \vec{U})| + \omega^2$, d.h. $\exists r, s \in$

$\mathbb{N}(|F(\vec{t},\vec{P})| = |F(\vec{a},\vec{U})| \# \omega{\cdot}r + s)$. Nach (a) folgt $2{\cdot}r + s = n(|F(\vec{t},\vec{P})|) - n(|F(\vec{a},\vec{U})|) \leq m$, also $r \leq m$, d.h. $|F(\vec{t},\vec{P})| < |F(\vec{a},\vec{U})| + \omega{\cdot}(m+1)$.

(c) i) Durch Induktion nach dem Aufbau von F folgt sofort wegen (a) und mit Lemma 9.9(f) $|F(\vec{a})| \leq |F(\vec{t})|$.
ii) Sei $\omega{\cdot}\gamma \leq |F(\vec{a})| < \omega{\cdot}(\gamma+1)$. Durch Induktion nach dem Formelaufbau folgt dann $\omega{\cdot}\gamma \leq |F(\vec{t})| < \omega{\cdot}(\gamma+1)$.
iii) Aus i) und ii) folgt $|F(\vec{a})| \leq |F(\vec{t},\vec{P})| < |F(\vec{a},\vec{U})| + \omega$, d.h. $\exists r \in \mathbb{N}(|F(\vec{t})| = |F(\vec{a})| + r)$. Nach (a) folgt $r = n(|F(\vec{t})|) - n(|F(\vec{a})|) \leq m$, d.h. $|F(\vec{t},\vec{P})| \leq |F(\vec{a},\vec{U})| + m$.

(d) Falls $Stufe(F(U_1^0)) < \beta$, folgt $Stufe(F(P_1^{\alpha_1})) < \beta$, also $|F(P_1^{\alpha_1})| \overset{13.3(a)}{<} \omega^3{\cdot}\sigma \leq |\forall X^\beta F(X^\beta)|$. Ansonsten folgt nach (b) $|F(P_1^{\alpha_1})| < |F(U_1^0)| + \omega^2 \leq |\forall X^\beta F(X^\beta)|$. Es folgt also in jedem Fall $|F(P_1^{\alpha_1})| < |\forall X^\beta F(X^\beta)|$, also $|F(P_1^{\alpha_1})| <_{n(F(P_1^{\alpha_1}))} |\forall X^\beta F(X^\beta)|$. Nach (a) folgt $n(F(P_1^{\alpha_1})) \leq n(F(U_1^0)) + n(P_1^{\alpha_1}) < 2{\cdot}n(\forall X^\beta F(X^\beta)) + n(P_1^{\alpha_1}) + 1 \leq F_{|\forall X^\beta F(X^\beta)|}(n(P_1^{\alpha_1}))$, also $|F(P_1^{\alpha_1})| \,\widetilde{<}_{1 \cup n(P_1^{\alpha_1})} |\forall X^\beta F(X^\beta)| = |\exists X^\beta F(X^\beta)|$.

(e) Nach (c) folgt $|F(t_1)| \leq |F(a_1)| + |t_1| < |\forall x F(x))|$, nach (a) $n(F(t_1)) \leq n(F(a_1)) + |t_1| < 2{\cdot}n(\forall x F(x))) + |t_1| + 1 \leq F_{|\forall x F(x)|}(|t_1|)$ also $|F(t_1)| \widetilde{<}_{1 \cup |t_1|} |\forall x F(x)| = |\exists x F(x)| = |(\sim\lambda x.F(x)|$.

Definition 13.5
Sei $\sigma > 0$.
Definition von (Quasi-)Interpretationen von Formeln von (DA) im halbformalen System (RA^*):
Eine Quasi-Interpretation Int^σ ist eine Abbildung, die jeder freien Zahlvariablen a entweder eine Zahl $Int^\sigma(a) \in \mathbb{N}$ oder a selbst, sowie jeder freien Prädikatvariablen U entweder einen Prädikator von (RA^*) $P^\alpha = Int^\sigma(U)$ einer Stufe $\alpha < \sigma$ oder U^0 zuordnet.
Eine Interpretation ist eine Quasi-Interpretation mit $Int^\sigma(a) \not\equiv a$ und $Int^\sigma(U) \not\equiv U^0$. Eine Interpretation ordnet also jeder freien Zahlvariablen a eine Zahl $Int^\sigma(a) \in \mathbb{N}$ und jeder freien Prädikatvariablen U einen Prädikator von (RA^*) $P^\alpha = Int^\sigma(U)$ einer Stufe $\alpha < \sigma$ zu.

Sei A eine (DA)-Formel oder ein (DA)-Prädikator. Dann sei A^{Int^σ} die (Quasi-)Formel bzw. der (Quasi-)Prädikator, der aus A entsteht, indem

jede freie Zahlvariable a durch $Int^\sigma(a)$, jede freie Prädikatvariable U durch $Int^\sigma(U)$ und $\sim U$ durch $\neg(Int^\sigma(U))$, jede gebundene Prädikatvariable X durch X^σ und $\sim X$ durch $\sim X^\sigma$ ersetzt wird. Sind dabei die gebundenen Variablen der $Int^\sigma(U)$ mit U oder $\sim U$ kommt in A vor und $Int^\sigma(U) \not\equiv U^0$ von denen von A verschieden, so heißt Int^σ eine (Quasi-)Interpretation für A. Die Interpretation eines Terms t^{Int^σ} wird analog definiert.
Ist Int^σ eine (Quasi-)Interpretation für A. Dann sei

$$m_{A,Int^\sigma} := \max(\{1\} \cup \{|Int^\sigma(a)| \mid a \text{ freie Zahlvariable und kommt in } A \text{ vor}\} \cup \{n(Int^\sigma(U)) \mid U \text{ freie Prädikatvariable, die in } A \text{ vorkommt }\}).$$

Folgerung 13.6
(a) Sei A Formel oder Prädikator von (DA), Int^σ Interpretation für A. Dann gilt $|A^{Int^\sigma}| \tilde{<}_{m_{A,Int^\sigma}+|A|} \omega^3 \cdot (\sigma+1)$ und $n(A^{Int^\sigma}) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma) + |A| + m_{A,Int^\sigma}$.
(b) Enthält A keine gebundenen Prädikatvariablen, so gilt $|A^{Int^\sigma}| \tilde{<}_{m_{A,Int^\sigma}+|A|} \omega^3 \cdot \sigma$ und $n(A^{Int^\sigma}) \leq |A| + m_{A,Int^\sigma}$.

Beweis
(a) Es genügt $n(A^{Int^\sigma}) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma) + |A| + m_{A,Int^\sigma}$ $\quad(*)$
zu zeigen, denn nach Folgerung 13.3(a) gilt $|A^{Int^\sigma}| < \omega^3 \cdot (\sigma+1)$ also $|A^{Int^\sigma}| <_{n(A^{Int^\sigma})} \omega^3 \cdot (\sigma+1)$, und aus $(*)$ folgt dann $n(A^{Int^\sigma}) < n(\omega^3 \cdot (\sigma+1)) + |A| + m_{A,Int^\sigma} + 1 \leq F_{\omega^3 \cdot (\sigma+1)}(|A| + m_{A,Int^\sigma})$.
Beweis von $(*)$:
Zunächst gilt $\omega^2[0] = \omega^1$, $\omega^1[0] = 1$, $1[0] = 0$, also $n(\omega^2) = 3$, $n(\omega) = 2$, $n(1) = 1$.
Sei $A \equiv A(U_1, \ldots, U_k, a_1, \ldots, a_l)$, wobei $U_1, \ldots, U_k$ alle freien Prädikatvariablen, $a_1, \ldots, a_l$ alle freien Zahlvariablen in A sind.
$\tilde{A}$ entstehe aus A, indem U_i durch U_i^0 und gebunden Prädikatvariablen X durch X^σ ersetzt werden.
Zeige $n(\tilde{A}) \leq |A| + n(\omega^3 \cdot \sigma)$ durch Induktion nach dem Aufbau von A.
Falls A Primformel, folgt $n(\tilde{A}) = n(A) = |A|$.
Falls $A \equiv U_i$, folgt $n(\tilde{A}) = 0$.
Falls $A \equiv (B \wedge C)$, $(B \vee C)$, folgt $n(\tilde{A}) = n(|\tilde{B} \uplus \tilde{C}| + 1) = \max\{n(\tilde{B}), n(\tilde{C})\} + 1 \overset{IV}{\leq} \max\{|B| + n(\omega^3 \cdot \sigma), |C| + n(\omega^3 \cdot \sigma)\} + 1 = \max\{|B|, |C|\} + 1 + n(\omega^3 \cdot \sigma) = |A| + n(\omega^3 \cdot \sigma)$.
Falls $A \equiv \forall x F(x)$, $\exists x F(x)$, $(\sim)\lambda x.F(x)$, folgt $n(\tilde{A}) = n(\widetilde{F(0)}) + 2 \overset{IV}{\leq} |F(0)| + n(\omega^3 \cdot \sigma) + 2 = |A| + n(\omega^3 \cdot \sigma)$.

Falls $A{\equiv}P(t)$, folgt $n(\tilde{A}) = \max\{n(\tilde{P}), |t|\} + 1 \overset{IV}{\leq} \{|P| + n(\omega^3{\cdot}\sigma), |t|\} + 1 \leq |A| + n(\omega^3{\cdot}\sigma)$.
Falls $A{\equiv}\forall XF(X)$, $\exists XF(X)$, folgt $n(\tilde{A}) = n((|\widetilde{F(U)}| \biguplus \omega^3{\cdot}\sigma)\#\omega^2)$
$= \max\{n(\widetilde{F(U)}), n(\omega^3{\cdot}\sigma)\} + 3$
$\overset{IV}{\leq} \max\{|F(U)| + n(\omega^3{\cdot}\sigma), n(\omega^3{\cdot}\sigma)\} + 3$
$= (|F(U)| + 3) + n(\omega^3{\cdot}\sigma) = |A| + n(\omega^3{\cdot}\sigma)$.
Mit Lemma 13.4(a) folgt $n(A^{Int^\sigma}) \leq n(\tilde{A}) + m_{A,Int^\sigma} \leq n(\omega^3{\cdot}\sigma) + |A| + m_{A,Int^\sigma}$.

(b) Es gilt $|A^{Int^\sigma}| < \omega^3{\cdot}\sigma$. Sei $\tilde{A}$ wie in (a) definiert. Dann folgt durch Induktion nach dem Aufbau von A wie beim Beweis von (a) $(*)$ $n(\tilde{A}) \leq |A|$, also wie in (a) $n(A^{Int^\sigma}) \leq |A| + m_{A,Int^\sigma}$ und wie in (a) $A^{Int^\sigma} \tilde{<}_{|A|} \omega^3{\cdot}\sigma$.

Kapitel 14

Interpretation der Beweise von (DA) in (RA^*)

In diesem Kapitel wird das System (DA) in (RA^*) interpretiert. Damit ist, zusammen mit der in Kapitel 11 geleisteten Arbeit, der Weg frei, um Schranken für in (DA) beweisbare Π^0_2-Sätze zu finden.

Lemma 14.1
Sei A (DA)-Formel, Γ (RA^*)-Formelmenge, Int^σ Interpretation für A. Dann gilt
$RA^*\vdash_0^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3+1,|A|+m_{A,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$.

Beweis:
Nach Lemma 11.13 gilt $RA^*\vdash_0^{(|A^{Int^\sigma}|\overset{\#}{\cdot}2)+1,1}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$.
Wegen $|A^{Int^\sigma}| < \omega^3\cdot(\sigma+1)$ und $\sigma > 0$ folgt $(|A^{Int^\sigma}|\overset{\#}{\cdot}2)+1 < (\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3$ und $n((|A^{Int^\sigma}|\overset{\#}{\cdot}2)+1) \overset{13.6(a)}{\leq} 2\cdot n(\omega^3\cdot\sigma) + 2\cdot|A| + 2\cdot m_{A,Int^\sigma} + 1 < 2\cdot n((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3) + 2\cdot|A| + 2\cdot m_{A,Int^\sigma} + 1 \leq F_{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3}(2\cdot|A| + 2\cdot m_{A,Int^\sigma})$, also $|A^{Int^\sigma}|\overset{\#}{\cdot}2+1$ $\widetilde{<}_{2\cdot|A|+2\cdot m_{A,Int^\sigma}}$ $(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3$. Weiter $2\cdot(|A| + m_{A,Int^\sigma}) <$ $F_{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3)+1}(|A| + m_{A,Int^\sigma})$, $(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3 <_0 ((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3)+1$. Zweimalige Anwendung von Regel($\widetilde{<}$) 11.4 ergibt
$RA^*\vdash_0^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}3+1,|A|+m_{A,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$.

Lemma 14.2

Sei $0 < \sigma_1 \leq \sigma_2$, $\forall X G(X)$ (DA)*-Formel,* $G(U)$ *ohne gebundene Prädikatvariable,* Int^{σ_2} *eine Interpretation für* $G(U^0)$*, außer für* U^0 *selbst. Dann folgt*

$$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + \omega + |G(U)| + 1, m_{G,Int^{\sigma_2}}} \neg\forall X^{\sigma_2} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_2}),\ \forall X^{\sigma_1} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_1}).$$

Beweis:

Nach Lemma 14.1 gilt

$$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + 1, |G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha))} \neg G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha), G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha)$$

für alle mit G verträglichen Prädikatoren P^α einer Stufe $\alpha < \sigma_1$. Mit Regel $(\tilde{<})$ (11.4) folgt, da $|G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)) \geq 1$,

$$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + |G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)), m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)} \neg G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha), G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha).$$

Da nach Lemma 13.6(a) $n(\neg G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha)) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)) \leq n(((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + |G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)))$ und $n(P^\alpha) < F_{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + |G(U)| + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha))z}(n(P^\alpha) \cup m_{G,Int^{\sigma_2}})$, folgt mit $(\mathbb{W})$

$$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + |G(U)|) + (m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)) + 1, m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)} \underbrace{\exists X^{\sigma_2} \neg G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_2})}_{\equiv \neg\forall X^{\sigma_2} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_2})}, G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha).$$

Da $(m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)) + 1 \tilde{<}_{m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)} \omega$, folgt mit $(\tilde{<})$

$$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + \omega + |G(U)|, m_{G,Int^{\sigma_2}} \cup n(P^\alpha)} \neg\forall X^{\sigma_2} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_2}), G^{Int^{\sigma_2}}(P^\alpha).$$

Mit $(\mathbb{A})$ folgt

$$RA^* \vdash_0^{(\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 3) + \omega + |G(U)| + 1, m_{G,Int^{\sigma_2}}} \neg\forall X^{\sigma_2} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_2}), \forall X^{\sigma_1} G^{Int^{\sigma_2}}(X^{\sigma_1}).$$

Lemma 14.3

Seien $F(\lambda x.A_i(x))$, $A_i(0)$ (RA^*)*-Formeln,*
$\rho := |F(\lambda x.A_1(x))| \uplus |F(\lambda x.A_2(x))|$.
Dann gilt $RA^* \vdash_0^{(\rho \overset{\#}{\cdot} 2) + 1, 1} \neg(\forall x(A_1(x) \leftrightarrow A_2(x)), \neg F(\lambda x.A_1(x)), F(\lambda x.A_2(x))$.

Beweis durch Induktion nach dem Aufbau von F.
$F_i := F(\lambda x.A_i(x))$.
1. Falls $F(U^0) = U^0(m)$, folgt nach Lemma 11.13
$RA^* \vdash_0^{(|A_1(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+1,1} A_1(m), \neg A_1(m)$, mit $(\mathbb{W})$ also, da
$n(\neg A_1(m)) \leq n(|A_1(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+1)$ und $m < F_{(|A_1(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+1}(m)$,
$RA^* \vdash_0^{(|A_1(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+2,m} A_1(m), \underbrace{(\sim\lambda x.A_1(x))(m)}_{\equiv\neg F_1}$. Weiter folgt aus
$RA^* \vdash_0^{(|A_2(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+1,1} A_2(m), \neg A_2(m)$, mit $(\mathbb{\Lambda})$
$RA^* \vdash_0^{(|A_2(m)|\overset{\#}{\cdot}2)+2,m} \neg A_2(m), \underbrace{(\lambda x.A_2(x))(m)}_{\equiv F_2}$.
Mit einer Anwendung der $(\widetilde{<})$ Regel 11.4 und einem $(\mathbb{\Lambda})$-Schluß folgt dann
$RA^* \vdash_0^{(|A_1(m)|\uplus|A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+3,m} (A_1(m) \wedge \neg A_2(m)), \neg F_1, F_2$.
Da $n(A_1(m) \wedge \neg A_2(m)) < n(((|A_1(m)| \uplus |A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+3)$, folgt mit $(\mathbb{W})$
$RA^* \vdash_0^{((|A_1(m)|\uplus|A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+4,m} \underbrace{((A_1(m) \wedge \neg A_2(m)) \vee (A_2(m) \wedge \neg A_1(m)))}_{\equiv\neg(A_1(m)\leftrightarrow A_2(m))},$
$\neg F_1, F_2$.
Da $n(\neg(A_1(m)\leftrightarrow A_2(m)) = n((|A_1(m)| \uplus |A_2(m)|)+2) <$
$n(((|A_1(m)| \uplus |A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+4)$, folgt mit $(\mathbb{W})$
$RA^* \vdash_0^{((|A_1(m)|\uplus|A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+5,m} \exists x(\neg(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x))), \neg F_1, F_2$.
Nun gilt $|F_i| = |\lambda x.A_i(x)(m)| = ((|A_i(0)|\#\omega)\uplus m)+1$, $|A_i(m)| = |A_i(0)|+k_i$ für ein $k_i \leq m$, also $((|A_1(m)| \uplus |A_2(m)|)\overset{\#}{\cdot}2)+5 \widetilde{<}_1 ((|A_1(0)| \uplus |A_2(0)|)\overset{\#}{\cdot}2)+ 2\cdot m+5 \overset{m+3\widetilde{<}_m\omega}{\widetilde{<}_m} ((|A_1(0)|\uplus|A_2(0)|)\#\omega)\overset{\#}{\cdot}2) <_m ((((|A_1(0)|\#\omega)\uplus(|A_2(0)|\#\omega)\uplus m)+1)\overset{\#}{\cdot}2)+1 = (\rho\overset{\#}{\cdot}2)+1$, mit $m < F_{(\rho\overset{\#}{\cdot}2)+1}(1)$. ($m+3\widetilde{<}_m\omega$, da $m+3 < 2\cdot n(\omega)+m+1 \leq F_\omega(m)$.) Mit zweimaliger Anwendung von Regel $(\widetilde{<})$11.4 und einmaliger Anwendung von $(\triangleleft)$ folgt die Behauptung.

2. Falls F unabhängig von U^0, folgt nach Lemma 11.13
$RA^* \vdash_0^{(\rho\overset{\#}{\cdot}2)+1,1} \neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)), \neg F_1, \underbrace{F_1}_{\equiv F_2}$.

3. Falls $F\equiv F^1 \vee F^2$, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$RA^*\vdash_0^{((|F_1^i|\uplus|F_2^i|)^{\#}_{\cdot}2)+1,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg F_1^i,F_2^i,$
mit $(\mathbb{W})$ also

$$RA^*\vdash_0^{(\overbrace{|F_1^1|\uplus|F_2^1|\uplus|F_1^2|\uplus|F_2^2|}^{=|F_1|\uplus|F_2|})+1)^{\#}_{\cdot}2,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),$$
$$,\neg F_1^i,(F_2^1\vee F_2^2),$$

mit $(\mathbb{\Lambda})$

$$RA^*\vdash_0^{((|F_1|\uplus|F_2|)^{\#}_{\cdot}2)+1,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\underbrace{(\neg F_1^1\wedge\neg F_1^2)}_{\equiv\neg F_1},$$
$$\underbrace{(F_2^1\vee F_2^2)}_{\equiv F_2}.$$

4. Falls $F\equiv F^1\wedge F^2$, folgt die Behauptung aus 3. mit A_1 und A_2 vertauscht. (Denn mit $RA^*\vdash_0^{\alpha,n}\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg F_1,F_2$ wird gleichzeitig auch $RA^*\vdash_0^{\alpha,n}\forall x(A_2(x)\leftrightarrow A_1(x)),\neg F_1,F_2$ bewiesen.)

5. Falls $F(U^0)\equiv\forall xG(x,U^0)$, $G(n,i):\equiv G(n,\lambda xA_i(x))$, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$RA^*\vdash_0^{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+1,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg G(n,1),G(n,2).$
Da $n<F_{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+1}(n)$ und
$n(\neg G(n,1))\leq n(((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+1)$, folgt mit $(\mathbb{W})$
$RA^*\vdash_0^{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+2,n\cup1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\exists x\neg(G(x,1),G(n,2).$
$((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+2\,\widetilde{\leq}_1((|G(0,1)|\uplus|G(0,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+2+2\cdot n\,\widetilde{<}_n$
$((|G(0,1)|\uplus|G(0,2)|)\#\omega)^{\#}_{\cdot}2\overset{9.9(\mathrm{g})}{=}((|G(0,1)|\#\omega)\uplus(|G(0,2)|\#\omega))^{\#}_{\cdot}2=\rho^{\#}_{\cdot}2.$
Also folgt mit $(\widetilde{<})$ $RA^*\vdash_0^{\rho^{\#}_{\cdot}2,n\cup1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg F_1,G(n,2)$. Mit einem $(\mathbb{\Lambda})$- Schluß folgt die Behauptung.

6. Falls $F(U^0)\equiv\exists xG(x,U^0)$, folgt die Behauptung aus 5. mit A_1 und A_2 vertauscht.

7. Falls $F(U^0)\equiv\forall X^\beta G(X^\beta,U^0)$, $G(P^\gamma,i):\equiv G(P^\gamma,\lambda xA_i(x))$, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$RA^*\vdash_0^{((|G(P^\gamma,1)|\uplus|G(P^\gamma,2)|)^{\#}_{\cdot}2)+1,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg G(P^\gamma,1),$
$\quad G(P^\gamma,2).$
Mit $(\mathbb{W})$ folgt

$RA^*\vdash_0^{((|G(P^\gamma,1)|\uplus|G(P^\gamma,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+1,n(P^\gamma)\cup 1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg\forall X^\beta G(X^\beta,1),$
$G(P^\gamma,2).$

Da $|G(P^\gamma,i)|+1<|\forall X^\beta G(X^\beta,i)|$, $n(|G(P^\gamma,i)|+1)\leq n(G(U^0,i))+n(P^\gamma)+1<2\cdot n(\forall X^\beta G(X^\beta,i))+(n(P^\gamma)\cup 1)+1\leq F_{|\forall X^\beta G(X^\beta,i)|}(n(P^\gamma)\cup 1)$, folgt mit $(\tilde{<})$

$RA^*\vdash_0^{(|\forall X^\beta G(X^\beta,1)|\uplus|\forall X^\beta G(X^\beta,2)|)\overset{\#}{\cdot}2,n(P^\gamma)\cup 1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),$
$\neg\forall X^\beta G(X^\beta,1),G(P^\gamma,2).$

Eine Anwendung der $(\bigwedge)$-Regel ergibt die Behauptung.

8. Falls $F(U^0)\equiv\exists X^\beta G(X^\beta,U^0)$, folgt die Behauptung aus 7. mit A_1 und A_2 vertauscht.

9. Falls $F(U^0)\equiv\lambda x.G(x,U^0)(n)$, $G(n,i):\equiv G(n,\lambda x A_i(x))$, folgt nach Induktionsvoraussetzung

$RA^*\vdash_0^{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+1,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\neg G(n,1),G(n,2).$

Mit einem $(\bigvee)$-Schluß folgt

$RA^*\vdash_0^{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+2,n\cup 1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\sim\lambda x.G(x,1)(n),$
$G(n,2).$

und mit $(\bigwedge)$ dann

$RA^*\vdash_0^{((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+3,1}\neg\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x)),\sim\lambda x.G(x,1)(n),$
$\lambda x.G(n,2)(n).$

Da $((|G(n,1)|\uplus|G(n,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+3\tilde{<}_1$ $((|G(0,1)|\uplus|G(0,2)|)\overset{\#}{\cdot}2)+2\cdot n+3\tilde{<}_1((((|G(0,1)|\uplus n)\uplus(|G(0,2)|\uplus n))\#\omega+1)\overset{\#}{\cdot}2)+1\overset{9.9(\mathrm{g})}{=}((((|G(0,1)|\#\omega)\uplus n)+1)\uplus(((|G(0,2)|\#\omega)\uplus n)+1))\overset{\#}{\cdot}2+1=((|F_1|\uplus|F_2|)\overset{\#}{\cdot}2)+1$, folgt mit $(\tilde{<})$ die Behauptung.

Lemma 14.4

Seien $F(U^0),\forall XA(a,X),F(\lambda x.\forall XA(x,X))$ (DA)-Formeln, $0<\sigma_1<\sigma_2$, Int^{σ_1}, Int^{σ_2} Quasi-Interpretationen für F und A, die gleiche Variable gleich interpretieren, also nur gebundene Prädikatvariable unterschiedlich behandeln, sowie U durch U^0 interpretieren. Sei $A_i(m):\equiv\forall X^{\sigma_i}A^{Int^{\sigma_i}}(m,X^{\sigma_i})$. Dann gilt

$RA^*\vdash_0^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot}2)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+|A(0,U)|+|F(U)|+1,m_{A,Int^{\sigma_2}}\cup m_{F(U),Int^{\sigma_2}}}$
$\neg\forall x(A_2(x)\leftrightarrow A_1(x)),\neg F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x)),F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x)).$

Beweis:
Sei $m := m_{A,Int^{\sigma_2}} \cup m_{F(U),Int^{\sigma_2}}$.
Nach Lemma 14.3 gilt
$RA^* \vdash_0^{(\rho \overset{\#}{\cdot} 2)+1,1} \neg\forall x(A_2(x) \leftrightarrow A_1(x)), \neg F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x)), F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x))$
mit $\rho := |F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x)| \uplus |F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x))|$.
Nun gilt $(\rho \overset{\#}{\cdot} 2) + 1 < ((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1)$ und
$n((\rho \overset{\#}{\cdot} 2) + 1) = 2 \cdot \max\{n(F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x)), n(F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x))\} + 1$
$\leq 2 \cdot \max\{n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |F(U)| + (m_{F(U),Int^{\sigma_2}} \cup n(\lambda x.A_1(x)), n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |F(U)| + (m_{F(U),Int^{\sigma_2}} \cup n(\lambda x.A_2(x))\} + 1$
$\leq 2 \cdot \max\{n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |F(U)| + (m_{F(U),Int^{\sigma_2}} \cup (n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + |\lambda x.\forall X A(x, X)| + m_{A,Int^{\sigma_1}})),$
$n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |F(U)| + (m_{F(U),Int^{\sigma_2}} \cup (n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + |\lambda x.\forall X A(x, X)| + m_{A,Int^{\sigma_2}}))\} + 1$
$\overset{m_{A,Int^{\sigma_1}} = m_{A,Int^{\sigma_2}}}{\leq} 4 \cdot (n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2)) + 2 \cdot m + 2 \cdot |\lambda x.\forall X A(x, X)| + 2 \cdot |F(U)| + 1$
$= 4 \cdot (n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2)) + 2 \cdot m + 2 \cdot |A(0, U)| + 2 \cdot |F(U)| + 11$
$< 2 \cdot (n(((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1)) + 2 \cdot (n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + m + |A(0, U)| + |F(U)| + 5) + 1$
$\leq F_{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1)}(2 \cdot (n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + m + |A(0, U)| + |F(U)| + 5))$.
Weiter gilt für beliebige α, m $\alpha <_{2 \cdot m} \alpha + 1$ mit $2 \cdot m < F_{\alpha+1}(m)$. Also folgt
$(\rho \overset{\#}{\cdot} 2) + 1 \tilde{<}_{n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + m + |A(0,U)| + |F(U)| + 5} ((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1)$.
Mit $(\tilde{<})$ folgt also
$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), n(\omega^3 \cdot \sigma_1) + n(\omega^3 \cdot \sigma_2) + m + |A(0,U)| + |F(U)| + 5}$
$\neg\forall x(A_2(x) \leftrightarrow A_1(x)), \neg F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x)), F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x))$.
Noch eine Anwendung von $(\tilde{<})$ ergibt
$RA^* \vdash_0^{((\omega^3 \cdot \sigma_2) \overset{\#}{\cdot} 2) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1) + |A(0,U)| + |F(U)| + 1, m}$
$\neg\forall x(A_2(x) \leftrightarrow A_1(x)), \neg F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_2(x)), F^{Int^{\sigma_2}}(\lambda x.A_1(x))$.

Lemma 14.5
Sind $\forall Y A(a, Y)$ und $\exists Y B(a, Y)$ Formeln in (DA), $0 < \sigma_1 < \sigma_2$. Seien Int^{σ_1}, Int^{σ_2} Quasi-Interpretationen für $\forall Y A(a, Y)$ und $\exists Y B(a, Y)$ bis auf die Variablen a, U^0. Sei $m \geq m_{A(0,U^0),Int^{\sigma_1}}$, $m_{A(0,U^0),Int^{\sigma_2}}$, $m_{B(0,U^0),Int^{\sigma_1}}$, $m_{B(0,U^0),Int^{\sigma_2}}$, , $n \geq |A(0, U)| + 3, |B(0, U)| + 3$, $\omega^3 \cdot \sigma_1 <_{m+1} \omega^3 \cdot \sigma_2$, $\rho \geq \omega^3 \cdot (\sigma_2 + 1)$. Gelte

$RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma_i)^{\overset{\#}{\cdot}} n, m}$
$$\forall x (\forall Y^{\sigma_i} A^{Int^{\sigma_i}}(x, Y^{\sigma_i}) \leftrightarrow \exists Y^{\sigma_i} B^{Int^{\sigma_i}}(x, Y^{\sigma_i})) \qquad (i = 1, 2).$$

Dann folgt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1) + \omega + 4, m}$
$$\forall x (\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^{\sigma_1}}(x, Y^{\sigma_1}) \leftrightarrow \forall Y^{\sigma_2} A^{Int^{\sigma_2}}(x, Y^{\sigma_2})).$$

Beweis:

Sei $A_i(n) :\equiv \forall Y^{\sigma_i} A^{Int^{\sigma_i}}(n, Y^{\sigma_i})$ und $B_i(n) :\equiv \exists Y^{\sigma_i} B^{Int^{\sigma_i}}(n, Y^{\sigma_i})$. Aus $RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma_i)^{\overset{\#}{\cdot}} n, m} \forall x (A_i(x) \leftrightarrow B_i(x))$ erhalten wir mit $(\tilde{<})$

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1)), m} \forall x (A_i(x) \leftrightarrow B_i(x))$, mit $(\bigwedge)$-Inversion 11.7

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} (A_i(k) \leftrightarrow B_i(k))$, noch einmal mit 11.7

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} (\neg A_i(k) \vee B_i(k))$ sowie

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} (\neg B_i(k) \vee A_i(k))$,

und mit $(\bigvee)$-Inversion 11.8 folgt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} \neg A_i(k), B_i(k)$ und (1.i)

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} \neg B_i(k), A_i(k)$. (2.i)

Nach Lemma 14.2 gilt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} 3) + \omega + |A(0,U)| + 1, m_{A(0,U), Int^{\sigma_2}} \cup k} \neg A_2(k), A_1(k)$ also mit $(\tilde{<})$

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} \neg A_2(k), A_1(k)$. (3)

Weiter folgt aus Lemma 14.2

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} 3) + \omega + |B(0,U)| + 1, m_{B(0,U), Int^{\sigma_2}} \cup k} \neg B_1(k), B_2(k)$, mit $(\tilde{<})$ also

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1), m \cup k} \neg B_1(k), B_2(k)$. (4)

Weiter gilt $n((\neg)A_i(k)) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma_i) + |(\neg)\forall Y A(0, Y)| + (m_{A, Int^{\sigma_i}} \cup k)$ $\leq n(((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1) + (m \cup k))$, genauso $n((\neg)B_i(k)) \leq n((((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n)$ $\#(\omega^3 \cdot \sigma_1) + (m \cup k))$. Weiter gilt $|A_i(k)|, |B_i(k)| < \omega^3 \cdot (\sigma_2 + 1) \leq \rho$. Ein (Cut) von (1.1) mit (4) ergibt deshalb

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1) + (m \cup k) + 1, m \cup k} \neg A_1(k), B_2(k)$,mit einem weiteren (Cut) mit (2.2) folgt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma_2)^{\overset{\#}{\cdot}} n) \# (\omega^3 \cdot \sigma_1) + (m \cup k) + 2, m \cup k} \neg A_1(k), A_2(k)$.

Aus (3) folgt mit $(\tilde{<})$ direkt

$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+(m\cup k)+2,m\cup k}\neg A_2(k), A_1(k)$.
Zweimalige Anwendung der ($\mathbb{W}$)-Regel ergibt (Bedingungen sind erfüllt)
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+(m\cup k)+4,m\cup k}(\neg A_1(k)\vee A_2(k))$ sowie
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+(m\cup k)+4,m\cup k}(\neg A_2(k)\vee A_1(k))$. Ein ($\mathbb{\Lambda}$)-Schluß ergibt
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+(m\cup k)+5,m\cup k}(A_1(k)\leftrightarrow A_2(k))$. Mit ($\widetilde{<}$) folgt
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+\omega+3,(m\cup k)}(A_1(k)\leftrightarrow A_2(k))$. Mit ($\mathbb{\Lambda}$) folgt
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma_2)\overset{\#}{\cdot} n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+\omega+4,m}\forall x(A_1(x)\leftrightarrow A_2(x))$.

Satz 14.6
Gelte $DA\vdash^m\Gamma$ *mit* $\sigma=\omega^m\cdot\gamma$, $1\leq\gamma<\omega^\omega$, *und sei* Int^σ *eine Interpretation für* Γ. *Dann folgt* $RA^*\vdash_{\omega^3\cdot(\sigma+1)}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$.

Beweis: durch Induktion nach m:
Sei $\rho:=\omega^3\cdot(\sigma+1)$.
Fallunterscheidung nach der letzten Regel:

1. Fall: Logisches Axiom:
Sei $\Gamma\equiv\Delta, A, \neg A$, $m=|A|+3$. Nach Lemma 14.1 folgt
$RA^*\vdash_{0}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} 3+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}+|A|}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$. Mit ($\widetilde{<}$) folgt
$RA^*\vdash_{0}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$.

2. Fall: Arithmetisches Axiom:
Nach Einsetzung ist eine der Formeln wahre Primformel und die Behauptung folgt mit einem ($\mathbb{\Lambda}$)-Schluß.

3. Fall: ($\wedge$)-Regel:
Sei $\Gamma\equiv\Delta,(A_1\wedge A_2)$ und $m=n+1$, $DA\vdash^n\Delta, A_1$ $DA\vdash^n\Delta, A_2$.
Nach Induktionsvoraussetzung folgt
$RA^*\vdash_{\rho}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma}, {A_1}^{Int^\sigma}$ und
$RA^*\vdash_{\rho}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma}, {A_2}^{Int^\sigma}$.
Mit einem ($\mathbb{\Lambda}$)-Schluß folgt
$RA^*\vdash_{\rho}^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},({A_1}^{Int^\sigma}\wedge {A_2}^{Int^\sigma})$, und mit ($\widetilde{<}$)
$RA^*\vdash_{\rho}^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot} m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},({A_1}^{Int^\sigma}\wedge {A_2}^{Int^\sigma})$.

4. Fall: $(\vee)$-Regel:
Sei $\Gamma \equiv \Delta, (A_1 \vee A_2)$ und $m = n+1$, $n \geq (|A_i|+1)$, $DA \vdash^n \Delta, A_i$ für ein $i \in \{1,2\}$. Nach Induktionsvoraussetzungund $(\tilde{<})$ folgt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, {A_i}^{Int^\sigma}$.

Da $n({A_i}^{Int^\sigma}) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma) + |A_i| + m_{A,Int^\sigma} \leq n(((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n) + m_{\Gamma,Int^\sigma})$, folgt mit einem $(\mathbb{W})$-Schluß

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, ({A_1}^{Int^\sigma} \vee {A_2}^{Int^\sigma})$.

Mit $(\tilde{<})$ folgt $RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} m, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, ({A_1}^{Int^\sigma} \vee {A_2}^{Int^\sigma})$.

5. Fall: $(\forall_1)$-Regel:
Gelte $\Gamma \equiv \Delta, \forall x F(x)$ und $DA \vdash^n \Delta, F(a)$, wobei a nicht frei in Δ und $m = n+1$. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung für alle $r \in \mathbb{N}$

$RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n, m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup r} \Delta^{Int^\sigma}, (F(r))^{Int^\sigma}$,mit $(\mathbb{A})$ und $(\tilde{<})$ also

$RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} m, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, (\forall x F(x))^{Int^\sigma}$.

6. Fall: $(\exists_1)$-Regel:
Gelte $\Gamma \equiv \Delta, \exists x F(x)$ mit $m = n+1$, $n \geq (|F(t)|+1) \cup |t|$ und $DA \vdash^n \Delta, F(t)$.
Wir nehmen an, daß Int^σ Zahlvariablen, die nicht in Δ aber in t vorkommen, durch 0 interpretiert. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma})$. Mit $(\tilde{<})$ folgt

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma})$. Da $n(t^{Int^\sigma}) \leq |t| + m_{\Gamma,Int^\sigma} < F_{((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}}(m_{\Gamma,Int^\sigma})$ und $n(F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma})) \leq n(\omega^3 \cdot \sigma) + |F(t)| + m_{\Gamma,Int^\sigma} \leq n(((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n) + m_{\Gamma,Int^\sigma})$ folgt mit $(\mathbb{W})$

$RA^* \vdash_\rho^{((\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, (\exists x F(x))^{Int^\sigma}$,
und, da $m_{\Gamma,Int^\sigma} + 1 \tilde{<}_{m_{\Gamma,Int^\sigma}} \omega^3 \cdot \sigma$, mit $(\tilde{<})$11.4

$RA^* \vdash_\rho^{(\omega^3 \cdot \sigma)\overset{\#}{\cdot} m, m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, (\exists x F(x))^{Int^\sigma}$.

7. Fall $(\forall_2)$-Regel:
Gelte $\Gamma \equiv \Delta, \forall X F(X)$, weiter U kommt nicht in Δ vor, $m = n+1$ und $DA \vdash^n \Delta, F(U)$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n, m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup n(P^\alpha)}\Delta^{Int^\sigma}, F^{Int^\sigma}(P^\alpha)$
für alle mit F verträglichen Prädikatoren P^α einer Stufe $\alpha < \sigma$. Mit einem ($\bigwedge\!\!\!\bigwedge$)- Schluß und ($\tilde{<}$) folgt $RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m, m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma}, \forall X^\sigma F^{Int^\sigma}(X^\sigma)$.

8. Fall ($\exists_2$)-Regel:
Gelte $\Gamma\equiv\Delta, \exists X F(X)$, mit $m = n+1,\ n \geq (|F(P)|+1) \cup |P|,\ P$ Prädikator ohne gebundene Prädikatvariable, $DA\vdash^n\Delta, F(P)$. Int^σ möge freie Prädikatvariabel, die in P aber nicht in Γ vorkommen, durch $\lambda x.x = x$ (mit $n(\lambda x.x = x) = 2$), freie Zahlvariable in P aber nicht in Γ mit 0 interpretieren, also folgt $m_{F(P),Int^\sigma} \leq m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n, m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\Delta^{Int^\sigma}, (F(P))^{Int^\sigma}$, und mit ($\tilde{<}$) folgt
$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2), m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma}, (F(P))^{Int^\sigma}$.
P enthält keine gebundenen Prädikatvariable, also ist P^{Int^σ} Prädikator einer Stufe $\alpha < \sigma$ und es gilt nach Lemma 13.6(b) $n(P^{Int^\sigma}) \leq |P| + (m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2) < F_{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}}(m_{\Gamma,Int^\sigma})$, sowie $n((F(P))^{Int^\sigma}) \leq n(\omega^3\cdot\sigma) + |F(P)| + (m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2) \leq n(((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n) + m_{\Gamma,Int^\sigma}$.
Da $(F(P))^{Int^\sigma} = F^{Int^\sigma}(P^{Int^\sigma})$, folgt mit ($\bigvee\!\!\!\bigvee$)
$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2)+1, m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma}, \exists X^\sigma F^{Int^\sigma}(X^\sigma)$.
Da $(m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2) + 1 \tilde{<}_{m_{\Gamma,Int^\sigma}} \omega^3\cdot\sigma$, folgt mit ($\tilde{<}$)
$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m, m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$.

9. Fall: ($\exists_3$)-Regel:
Sei $\Gamma\equiv\Delta, \exists X F(X)$, $m = n+3$, $n \geq (|A(0,U)|+|F(U)|+3) \cup (|B(O,U)|+3)$.
Gelte $DA\vdash^n F(\lambda x.\forall Y A(x,Y))$ und $DA\vdash^n\forall x(\forall Y A(x,Y)\leftrightarrow\exists Y B(x,Y))$.
Falls in A, B Variable vorkommen, die nicht in Γ vorkommen, seien diese in Int^σ mit $\lambda x.x = x$ bzw. 0 belegt.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n, m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\Delta^{Int^\sigma}, F^{Int^\sigma}(\lambda x.(\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x, Y^\sigma))) \tag{1}$$

und

$$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n, m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\forall x(\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x, Y^\sigma)\leftrightarrow\exists Y^\sigma B^{Int^\sigma}(x, Y^\sigma)). \tag{2}$$

Für die Stufen aller eingesetzten $Int^\sigma(U)$ gelte $\sigma_0 = \max\{0\}\cup$
$\{$ Stufe$(Int^\sigma(U))$ $|$ U kommt in F oder Δ vor $\}$. Dann folgt $\sigma_0 =$

Stufe$(Int^\sigma(U))$ für eine in $F,\ \Delta$ vorkommende freie Prädikatvariable U oder $\sigma_0 = 0$. Da, falls $\sigma_0 \neq 0$, $|Int^\sigma(U)| = \omega^3{\cdot}\sigma_0 + \omega^2{\cdot}k + \omega{\cdot}l + r$ für gewisse $k, l, r \in \mathbb{N}$ folgt $n(Int^\sigma(U)) \geq n(\omega^3{\cdot}\sigma_0)$, also $\omega^3{\cdot}\sigma_0 <_{m_{\Gamma,Int^\sigma}} \omega^3{\cdot}\sigma$. Es folgt $\omega^3{\cdot}\sigma_0 \leq (\omega^3{\cdot}\sigma)[m_{\Gamma,Int^\sigma}] < (\omega^3{\cdot}\sigma)[m_{\Gamma,Int^\sigma}+1]$, was auch im Fall $\sigma_0 = 0$ folgt. Es gilt nun $(\omega^3{\cdot}\sigma)[m_{\Gamma,Int^\sigma}+1] = \omega^3{\cdot}\sigma_1$ für ein $\sigma_1 = \omega^n{\cdot}\gamma'$ mit $\gamma' < \omega^\omega$. (Denn sei $\sigma = \omega^m{\cdot}\gamma$, mit $\gamma{=_{NF}}\omega^{m_1} + \cdots + \omega^{m_k}$, so folgt $\omega^3{\cdot}\sigma{=_{NF}}\omega^{m_1+m+3} + \cdots + \omega^{m_k+m+3}$ und $(\omega^3{\cdot}\sigma)[m_{\Gamma,Int^\sigma}+1] = \omega^{m_1+m+3} + \cdots + \omega^{m_{k-1}+m+3} + \omega^{m_k+m+2}{\cdot}(m_{\Gamma,Int^\sigma}+2) =$
$\omega^3{\cdot}(\omega^n{\cdot}\underbrace{(\omega^{m_1+1} + \cdots + \omega^{m_{k-1}+1} + \omega^{m_k}{\cdot}(m_{\Gamma,Int^\sigma}+2)))}_{=:\gamma'}$).

Nach Induktionsvoraussetzung gilt also (mit Abschwächungslemma)

$$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma_1)\overset{\#}{\cdot}n,\,m_{\Gamma,Int^{\sigma_1}}\cup 2}$$
$$\forall x(\forall Y^{\sigma_1}A^{Int^{\sigma_1}}(x,Y^{\sigma_1})\leftrightarrow\exists Y^{\sigma_1}B^{Int^{\sigma_1}}(x,Y^{\sigma_1})), \tag{3}$$

wobei Int^{σ_1} eine Belegung sei, die alle Variablen in $A,\ B,\ \Gamma$ wie Int^σ belegt, also $A^{Int^{\sigma_1}}\equiv A^{Int^\sigma},\ B^{Int^{\sigma_1}}\equiv B^{Int^\sigma}, m_{\Gamma,Int^{\sigma_1}} = m_{\Gamma,Int^\sigma}$. Mit Lemma 14.5 folgt aus (2) und (3)

$$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+\omega+4,(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2)}$$
$$\forall x(\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)\leftrightarrow\forall Y^{\sigma_1}A^{Int^\sigma}(x,Y^{\sigma_1}))).$$

Sei $A_1(a) :\equiv\forall Y^{\sigma_1}A^{Int^\sigma}(a,Y^{\sigma_1}),\ A_2(a) :\equiv\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(a,Y^\sigma)$. Da $n(\omega+4) = 6 < 2{\cdot}3+1+1 \leq 2{\cdot}n(\omega^3{\cdot}\sigma)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1 \leq F_{\omega^3\cdot\sigma}(m_{\Gamma,Int^\sigma})$, d.h. $\omega+4 <_{m_{\Gamma,Int^\sigma}} (\omega^3{\cdot}\sigma)$, folgt mit $(\tilde{<})$

$$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1),m_{\Gamma,Int^\sigma}}\forall x(A_2(x)\leftrightarrow A_1(x)). \tag{4}$$

Nach Folgerung 14.4 folgt

$$RA^*\vdash_0^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}2)\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+|A(0,U)|+|F(U)|+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}$$
$$\neg\forall x(A_2(x)\leftrightarrow A_1(x)),\neg F^{Int^\sigma}(\lambda x.A_2(x)),F^{Int^\sigma}(\lambda x.A_1(x)),$$

mit $(\tilde{<})$ also

$$RA^*\vdash_0^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1),m_{\Gamma,Int^\sigma}}$$
$$\neg\forall x(A_2(x)\leftrightarrow A_1(x)),\neg F^{Int^\sigma}(\lambda x.A_2(x)),F^{Int^\sigma}(\lambda x.A_1(x)). \tag{5}$$

Es gilt nun $n(\forall x(\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)\leftrightarrow\forall Y^{\sigma_1}A^{Int^{\sigma_1}}(x,Y^{\sigma_1})))$
$= \max\{\max\{n(A^{Int^\sigma}(0,U^0)),n(\omega^3{\cdot}\sigma)\}+3,\max\{n(A^{Int^\sigma}(0,U^0)),n(\omega^3{\cdot}\sigma_1)\}+3\}+4$
$\leq n((\omega^3{\cdot}\sigma)\#(\omega^3{\cdot}\sigma_1)) + |A(0,U)| + m_{A,Int^\sigma} + 7$
$\leq n(((\omega^3{\cdot}\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3{\cdot}\sigma_1)) + m_{\Gamma,Int^\sigma})$.
Weiter gilt $|\forall x(\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)\leftrightarrow\forall Y^{\sigma_1}A^{Int^{\sigma_1}}(x,Y^{\sigma_1}))| < \rho$

Also folgt mit einem (Cut) von (4) und (5) und mit $(\tilde{<})$

$RA^*\vdash_0^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}}$
$\neg F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)), F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^\sigma}(x,Y^{\sigma_1}))$.

Da $n(\neg F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)))$
$\leq n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(U)|+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup(n(\lambda x.\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma)))))$
$\leq n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(U)|+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup(\max\{n(A^{Int^\sigma}(0,U^0)),n(\omega^3\cdot\sigma)\}+5))$
$\leq n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(U)|+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup(\max\{n(\omega^3\cdot\sigma)+|A(0,U)|+m_{\Gamma,Int^\sigma},$
$n(\omega^3\cdot\sigma)\}+5))$
$\leq 2\cdot n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(U)|+|A(0,U)|+m_{\Gamma,Int^\sigma}+5$
$\leq n(((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1))+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1)$
und $|\neg F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^\sigma A^{Int^\sigma}(x,Y^\sigma))|<\rho$,
ergibt ein Schnitt mit (1)

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+2,m_{\Gamma,Int^\sigma}}$
$\Delta^{Int^\sigma}, F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^\sigma}(x,Y^{Int^{\sigma_1}}))$.

$\lambda x.\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^\sigma}(x,Y^{\sigma_1})$ ist, da A keine gebundenen Prädikatvariable enthält, Prädikator der Stufe $\sigma_1<\sigma$.

Da $n(\lambda x.\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^\sigma}(x,Y^{\sigma_1}))$
$=\max\{n(A^{Int^\sigma}(0,U^0)),n(\omega^3\cdot\sigma_1)\}+5$
$\overset{13.6(b)}{\leq}\max\{|A(0,U)|+m_{\Gamma,Int^\sigma},n(\omega^3\cdot\sigma_1)\}+5$
$<F_{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+2))\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+2}(m_{\Gamma,Int^\sigma})$ und (analog wie für σ statt σ_1 bewiesen)
$n(F^{Int^\sigma}(\lambda x.\forall Y^{\sigma_1} A^{Int^\sigma}(x,Y^{\sigma_1})))$
$\leq n(((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+2+m_{\Gamma,Int^\sigma})$, folgt

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1))\#(\omega^3\cdot\sigma_1)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+3,m_{\Gamma,Int^\sigma}} \Delta^{Int^\sigma}, \exists X^\sigma F^{Int^\sigma}(X^\sigma)$.

$\omega^3\cdot\sigma_1 <_{m_{\Gamma,Int^\sigma}+1} \omega^3\cdot\sigma$, $m_{\Gamma,Int^\sigma}+3 <_{m_{\Gamma,Int^\sigma}+3} \omega^3\cdot\sigma$, also folgt mit $(\tilde{<})$

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$.

10. Fall: (λ_1)-Regel:
$\Gamma\equiv\Delta,(\lambda x.F(x))(t)$, $DA\vdash^n\Delta,F(t)$, $m=n+1$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma})$,

mit $(\bigwedge)$ folgt also

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},(\lambda x.F^{Int^\sigma}(x))(t^{Int^\sigma})$, mit $(\tilde{<})$ weiter

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},(\lambda x.F^{Int^\sigma}(x))(t^{Int^\sigma})$.

11. Fall: (λ_2)-Regel:
$\Gamma\equiv\Delta,(\sim\lambda x.F(x))(t)$, $DA\vdash^n\Delta,\neg F(t)$, $m=n+1$, $n\geq(|F(t)|+1)\cup|t|$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},\neg F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma})$,

mit $(\mathbb{W})$ also, da $n(F^{Int^\sigma}(t^{Int^\sigma}))\leq n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(t)|+m_{\Gamma,Int^\sigma}<n(((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+m_{\Gamma,Int^\sigma})$ und $n(t^{Int^\sigma})\leq|t|+m_{\Gamma,Int^\sigma}<F_{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}}(m_{\Gamma,Int^\sigma})$

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+m_{\Gamma,Int^\sigma}+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},(\sim\lambda x.F^{Int^\sigma}(x))(t)$, mit $(\lhd)$ also

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},(\sim\lambda x.F^{Int^\sigma}(x))(t^{Int^\sigma})$.

12. Fall: (ind)-Regel:
Gelte $DA\vdash^m\Delta,\neg F(a),F(Sa)$ sowie $DA\vdash^m\Delta,F(0)$.
Sei $\Gamma\equiv\Delta,\forall xF(x)$, $m\geq|F(0)|+1$, $n=m+1$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup k}\Delta^{Int^\sigma},\neg F^{Int^\sigma}(k),F^{Int^\sigma}(Sk)$, sowie

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},F(0)$.
Da $n(F^{Int^\sigma}(k))\leq n(\omega^3\cdot\sigma)+|F(0)|+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup k)$ und $|F^{Int^\sigma}(k)|<\rho$, folgt mit (Cut)-Schlüssen

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+k+m_{\Gamma,Int^\sigma},m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup k}\Delta^{Int^\sigma},F^{Int^\sigma}(k)$, mit $(\tilde{<})$ also

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+\omega\cdot 2,m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup k}\Delta^{Int^\sigma},F^{Int^\sigma}(k)$, mit $(\mathbb{A})$ also

$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n)+\omega\cdot 2+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},\forall xF^{Int^\sigma}(x)$, und, da $\omega\cdot 2+1<(\omega^3\cdot\sigma)$, $n(\omega\cdot 2+1)=5<10=2\cdot 4+1+1\leq 2\cdot n((\omega^3\cdot\sigma))+1+1\leq F_{\omega^3\cdot\sigma}(1)$, also $\omega\cdot 2+1\tilde{<}_1\omega^3\cdot\sigma$, mit $(\tilde{<})$

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Delta^{Int^\sigma},\forall xF^{Int^\sigma}(x)$, die Behauptung.

13. Fall: (Cut)-Regel:
Sei $m=n+1$, $n\geq|A|$ und gelte $DA\vdash^n\Gamma,A$ sowie $DA\vdash^n\Gamma,\neg A$.
Für Variable in A, die nicht in Γ vorkommen, gelte $Int^\sigma(a)=0$ bzw. $Int^\sigma(U)\equiv\lambda x.x=x$.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\Gamma^{Int^\sigma}, A^{Int^\sigma}$ sowie
$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n),m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\Gamma^{Int^\sigma}, \neg A^{Int^\sigma}$. Da $n(A^{Int^\sigma}) \leq n(\omega^3\cdot\sigma) + |A| +$ $(m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2) \leq n(((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n) + (m_{\Gamma,Int^\sigma} \cup 2)) + 1$ sowie $|A^{Int^\sigma}| < \rho$, folgt mit einem (Cut)
$RA^*\vdash_\rho^{((\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}+n)+(m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2)+1,m_{\Gamma,Int^\sigma}\cup 2}\Gamma^{Int^\sigma}$ und mit $(\tilde{<})$
$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}(n+1),m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$.

14. Fall: $(<)$-Regel:
Gelte $DA\vdash^n\Gamma$ mit $n < m$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt
$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}n,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$ und mit $(\tilde{<})$ folgt
$RA^*\vdash_\rho^{(\omega^3\cdot\sigma)\overset{\#}{\cdot}m,m_{\Gamma,Int^\sigma}}\Gamma^{Int^\sigma}$.

Kapitel 15

Schranken für beweisbare Π_2^0-Sätze

In diesem Kapitel wird das Ergebnis der Arbeit angegeben: Schranken für in (PA) bzw. (DA) beweisbare Π_2^0-Sätze.

Satz 15.1
Sei $A(a,b)$ eine Σ_1^0-Formel ohne freie Variable (außer a und b). Gelte $PA \vdash^m \forall x \exists y A(x,y)$.
Dann folgt $\exists \alpha < \epsilon_0 \forall n \in \mathbb{N} \exists k \leq F_\alpha(n \cup 1)$ $(\mathbf{Z} \models A(n,k))$. (Hierbei sei $\mathbf{Z}$ das Standardmodell der der natürlichen Zahlen).

Beweis:
Aus $PA \vdash^m \forall x \exists y A(x,y)$ folgt aus dem Einbettungslemma für (PA) 12.2 $\Sigma \vdash_m^{\omega+m,1} \forall x \exists y A(x,y)$. Sei $\lambda_1 := \omega^{\omega^{\omega+\omega+m}}$, $\lambda_{l+1} := \omega^{\omega^{\lambda_l + \lambda_l}}$ für $l = 1, \ldots, m-1$. Dann folgt $\forall l \leq m (\lambda_l < \epsilon_0)$ und nach dem 2. Schnitteliminationssatz 11.12 für $l = 1, \ldots, m$ $\Sigma \vdash_{m-l}^{\lambda_l,1} \forall x \exists y A(x,y)$. Nach dem Kollabierungslemma 11.6 folgt für alle $r \geq 1$ $\models \forall x \exists y A(x,y)[r/F_{\lambda_m+1}(r)]$, also $\forall 1 \leq r \in \mathbb{N} \forall n \leq r \exists k \leq F_{\lambda_m+1}(k)$ $(\models A(n,k)[r/F_{\lambda_m+1}(r)])$. Da $A(n,l)$ eine Σ_1^0-Formel ist, folgt aus $\models A(n,k)[r/F_{\lambda_m+1}(r)]$ dann $\mathbf{Z} \models A(n,k)$. Setzt man also $\alpha = \lambda_m + 1 < \epsilon_0$ und $r := n \cup 1$ so folgt $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \leq F_\alpha(n \cup 1)$ $(\mathbf{Z} \models A(n,k))$.

Satz 15.2
Sei $A(a,b)$ eine Σ_1^0-Formel ohne freie Variable (außer a und b). Gelte $DA \vdash^m \forall x \exists y A(x,y)$.

Dann folgt $\exists\alpha < \phi_\omega 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists k \leq F_\alpha(n \cup 1)$ $(\mathbf{Z} \models A(n,k))$.

Beweis:
Aus $DA \vdash^m \forall x \exists y A(x,y)$ folgt aus dem Einbettungssatz für (DA) 14.6 $RA^* \vdash^{\omega^{3+m}\cdot m,1}_{\omega^{3+m}+\omega^3} \forall x \exists y A(x,y)$. Sei $\lambda_1 := \phi_3(\omega^{\omega^{3+m}\cdot(m+1)})$, $\lambda_2 := \phi_{3+m}(\omega^{\lambda_1 \cdot 2})$. Dann folgt $\lambda_2 < \phi_\omega 0$ und durch zweimalige Anwendung des 2. Schnitteliminationssatzes 11.12 (beachte, daß der Beweiskalkl von (RA^*) der von (Σ) ist) $RA^* \vdash^{\lambda_2,1}_0 \forall x \exists y A(x,y)$. Wie im Beweis von Satz 15.1 folgt daraus mit $\alpha := \lambda_2 + 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \exists k \leq F_\alpha(n \cup 1)$ $(\mathbf{Z} \models A(n,k))$.

Teil III

Anhang

Anhang A

Symbolverzeichnis

Symbol	eingeführt in:
Kapitel 2	
On, Lim	2.1
$\aleph_\alpha$	2.1
Ω_α	2.1
P, $P(\alpha)$	2.1
$\alpha \# \beta$	2.1
$\alpha =_{NF} \beta_1 + \cdots + \beta_n$	2.1
$C_v^n(\alpha)$, $C_v(\alpha)$	2.3
$\psi_v \alpha$	2.3
$\epsilon(v)$	2.10 (Beweis)
$\alpha * v$	2.10 (Beweis)
$G_u \gamma$	2.12, vgl. auch 3.5
$Länge_s(\alpha)$	2.14
Kapitel 3	
$D_0, D_1, \ldots, D_\omega$	3.1
$(a_0, \ldots, a_n)$, (a)	3.1
T	3.1
$Länge(a)$	3.1
$(T1)$, $(T2)$, $(T3)$	3.1
P^{T}, $P^T(a)$	3.1
$a \prec b$, $a \preceq b$	3.2
$(\prec 1)$, $(\prec 2)$, $(\prec 3)$	3.2

Literaturverzeichnis

[1] Wilfried Buchholz: A new system of proof-theoretic ordinal functions. Annals of Pure and Applied Logic 32 (1986), 195 - 207.

[2] Wilfried Buchholz: An independence result for $(\Pi^1_1 - CA) + BI$. Annals of Pure and Applied Logic 33 (1987), 131-155.

[3] Wilfried Buchholz and Stan Wainer: Provably computable functions and the fast growing Hierarchy. Contemporary Mathematics 65 (1987), 179-198.

[4] Wilfried Buchholz und Kurt Schütte: Proof Theory of Impredicate Subsystems of Analysis. Bibliopolis, Napoli, 1988.

[5] Wilfried Buchholz: Manuskripte.

[6] Wilfried Buchholz: Vorentwurf zur Diplomarbeit Setzer.

[7] Diana Schmidt: Built-up systems of fundemental sequences and hierarchies of number-theoretic functions. Arch. math. Logik 18 (1977), 47 - 53.

[8] Kurt Schütte: Proof Theory. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[9] Kurt Schütte: Majorisierungsrelationen und Fundamentalfolgen eines Ordinalzahlensystems von G. Jäger. Arch. math. Logik 26 (1986/1987), 29-55.

[10] Helmut Schwichtenberg: Proof Theory: Some Applications of Cut-Elimination. In: Handbook of mathematical logic. Edited by J. Barwise. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New-York, Oxford, 1977, pp. 867-895.

Hiermit erkläre ich, daß ich die Diplomarbeit selbstständig verfaßt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet wurden.

München, den 5. Januar 1990